Ensembles indépendants maximaux

Master 2 Informatique - UFR S.A.T

Pr. Ousmane THIARE

ousmane.thiare@ugb.edu.sn
http://www.ousmanethiare.com/

16 avril 2020

[www.ugb.sn]

Chapitre 7 : Ensembles indépendants maximaux

Un ensemble indépendant maximal dans un graphe G (MIS en anglais, pour Maximal Independent Set) est un sous-ensemble de sommets M de G tel que : 1) si $x, y \in M$, alors x et y ne sont pas adjacents (M est donc un ensemble indépendant) ; et 2) si l'on ajoute un nouveau sommet à M, alors M n'est plus un ensemble indépendant (il est donc maximal pour l'inclusion).
Il faut noter que les deux conditions précédentes peuvent être vérifiées localement. Pour l'indépendance, il faut vérifier que tout sommet x dans M n'a aucun voisin dans M, et 2) pour la maximalité, si $x \notin M$, alors il doit avoir au moins un voisin dans M puisque sinon on pourrait rajouter x à M.

Remarques :

- Un MIS est un ensemble dominant (c'est-à-dire tout $x \notin M$ a un voisin $y \in M$).

Coloration, ensemble dominant et MIS sont donc des notions proches et, comme nous allons le voir, il existe des moyens de calculer l'un à partir de l'autre.

Remarques :

- Un MIS est un ensemble dominant (c'est-à-dire tout $x \notin M$ a un voisin $y \in M$).
- Dans une coloration (propre) les sommets d'une même couleur forme un ensemble indépendant (mais pas forcément indépendant).

Coloration, ensemble dominant et MIS sont donc des notions proches et, comme nous allons le voir, il existe des moyens de calculer l'un à partir de l'autre.

Introduction
Algorithmes de bases
Ensemble dominant

L'utilisation des MIS en algorithmique distribuée est importante. On utilise les MIS pour créer du parallélisme. Il est souvent important que des ensembles de sommets puissent calculer indépendamment les uns des autres. Typiquement, pour le calcul d'arbre couvrant de poids minimum (MST), dans l'implémentation de Kruskal, il est assez intéressant que chaque sous arbre (initialement réduit à un sommet) puisse "pousser" indépendamment. Pour ce faire les racines de ces sommets initiateurs doivent être indépendantes pour ne pas se gêner.

En séquentiel...
Note : calculer un MIS est donc très simple, de même que le calcul d'un ensemble dominant ou d'une coloration. Par contre, si l'on souhaite un MIS de cardinalité maximum (bien faire la différence entre maximal et maximum) le problème devient difficile (NP- complet pour la décision) et même reste difficile à approximer. C'est la même chose pour trouver un ensemble dominant de petite taille où une coloration avec peu de couleurs.
En distribué l'approche consiste à calculer une variable b représentant la décision de joindre (b = 1) ou de ne pas joindre (b = 0) l'ensemble MIS. Initialement b = ?1.

Note :
Il y a deux façons de faire : MIS_{dfs} et MIS_{rank}. Dans le pire des cas, ils ont la même complexité, mais le second à tendance à être plus rapide dans la pratique. Cependant, MIS_{rank} pré-suppose des identité unique, alors que MIS_{dfs} non.
Dans un chemin, MIS_{rank} peut aller aussi lentement que MIS_{dfs}. Cependant, on peut montrer qu'avec grande probabilité, une permutation aléatoire dans un chemin fait que MIS_{rank} calculera un MIS en temps $O(logn/loglogn)$, au lieu de n dans le cas du MIS_{dfs}.

Definition

Un ensemble S est dominant pour un graphe G si pour tout sommet $x \in V(G)$, soit $x \in S$, ou x a un voisin $y \in S$.

Rappelons qu'un MIS est un ensemble dominant, mais pas l'inverse !
Ici on s'intéresse aux ensemble dominants de petites cardinalités pour des motivations liés au routage (notion de sommets spéciaux et peu nombreux qui contrôlent tous les autres).

Proposition

Tout graphe connexe possède un ensemble dominant de taille $\leq \frac{n}{2}$, si n>1.

Arbre couvrant + partition en deux couleurs suivant la parité de la distance à la racine.
On s'intéresse à de petits ensemble dominants (de *taille* $\leq \frac{n}{2}$) pour les arbres enracinés (on suppose donc que chacun connaît son père).