Récurrence et induction

L2 Informatique - UFR S.A.T

Pr. Ousmane THIARE

ousmane.thiare@ugb.edu.sn
http://www.ousmanethiare.com

16 avril 2020

Récurrence et induction

La récurrence classique, dite **faible**, est celle qu'on voit à l'école, elle permet de démontrer une propriété de la forme $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ en montrant qu'elle est vraie pour 0 et qu'elle est héréditaire, c'est-à-dire que si P(n) est vraie pour un n donné (éventuellement n = 0), alors elle est aussi vraie pour n+1. Plus formellement, on exprime le principe de raisonnement par récurrence de la façon suivante :

$$\forall P, \left(\begin{array}{c} P(0) \wedge \\ \forall n \in \mathbb{N}, P(n) \rightarrow P(n+1) \end{array} \right) \rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P(n)$$

P(0) est appelé le cas de base et $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \rightarrow P(n+1)$ est appelé le cas de récurrence (faible).

La récurrence **forte** est en fait équivalente à la version faible, mais s'avère plus agréable dans certains cas. la notion d'hérédité y est différente : si on suppose P(k) est vraie pour tout k strictement plus petit qu'un n donné (éventuellement n = 0), alors elle est vraie pour n. Plus formellement :

$$\forall P, (\forall n \in \mathbb{N}, ((\forall k < n, P(k)) \rightarrow P(n))) \rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P(n)$$

Remarquez que le cas de base a disparu. En fait il est contenu dans l'autre cas (le cas de récurrence (forte)). Nous montrons ce résultat maintenant :

Propriété

Si la propriété $(\forall n \in \mathbb{N}, ((\forall k < n, P(k)) \rightarrow P(n)))$ *est vraie, alors P(0) aussi.*

Preuve

Si cette propriété est vraie alors en particulier elle est vraie pour n = 0 :

$$((\forall k < 0, P(k)) \rightarrow P(0))$$

Comme il n'y a pas de k<0 dans $\mathbb{N}, \forall k < 0, P(k)$ *est équivalent à vrai, on a donc :*

$$vrai \rightarrow P(0)$$

qui est équivalent à P(0).

Le raisonnement par induction est une généralisation de la récurrence faible à d'autres ensemble que $\mathbb{N}$. Les ensembles sur lesquels s'applique se principe (ce "schéma") de raisonnement sont *les ensembles définis par induction*.

La définition d'ensemble E par induction comporte 3 parties :

- La base, qui est un ensemble d'éléments appartenant à E par définition.
- L'induction, qui est un ensemble de règles (d'opérateurs) permettant de construire (récursivement) de nouveaux éléments de E à partir d'éléments de E. Donc en partant de la base, puis par itération.
- La fermeture qui signifie que E est l'ensemble de tous les éléments que l'on peut construire à partir de la base en appliquant les opérateurs du point précédent. La fermeture signifie également que E ne contient aucun autre éléments.

Par exemple voici une définition de l'ensemble $\mathbb{N}$:

Exemple : Définition inductive de $\mathbb{N}$

- Base : $B = \{0\}$;
- Induction : $\Omega = \{S\}$, où S est d'arité 1et prend son argument dans $\mathbb{N}$ (noté $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$;
- fermeture : $\mathbb{N}$ est la fermeture de B par Ω.

Exemple : Définition inductive de $\mathbb{N}$

On peut faire plusieurs remarques :

- On voit que les termes de la forme 0, S(0), S(S(0))... appartiennent à $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{N}$ apparaît dans sa propre définition (ici dans le type de S). Il s'agit d'une définition récursive : en fait dans la définition $\mathbb{N}$ représente n'importe quel ensemble E vérifiant $B \subset E$ et $\forall x \in E, S(x) \in E$. C'est l'opération de fermeture qui permet de préciser ensuite que parmi les E possibles, on en prend un en particulier (voir section suivante).

Récurrence "faible"
Récurrence "forte"
Induction

Exemple : Définition inductive de $\mathbb{N}$

- L'opérateur S est un constructeur, pas une fonction. Ce qui signifie que S(0) est un élément de $\mathbb{N}$, et qu'il ne se calcule pas vers une autre valeur (il n'est pas égal à 1, qui n'est d'ailleurs pas défini ici). Cette notion de constructeur est bien évidemment à rapprocher de celle de constructeur de type dans les langages fonctionnels. En fait dans les langages fonctionnels, on appelle constructeurs les éléments de la base et les opérateurs.

Cependant on peut parfois associer un calcul aux opérateurs dans une définition inductive.
Suivant cette dernière remarque, pour N on peut par exemple remplacer S par la fonction succ, définie par exemple sur $\mathbb{R}$, qui ajoute 1 à son argument. Dans ce cas $\mathbb{N}$ est défini comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}$:

Exemple : Définition inductive de $\mathbb{N}$ à l'aide d'un opérateur fonction

- Base : $B = \{0\} \subset \mathbb{R}$;
- Induction : $\Omega = \{succ\}$, où $succ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $succ : n \mapsto n + 1$;
- fermeture : $\mathbb{N}$ est la fermeture de B par Ω.

On voit que les réels 0, 1, 2,... appartiennent à $\mathbb{N}$. On retiendra donc que lorsqu'on définit un ensemble par induction, si on associe des fonctions aux opérateurs, alors l'ensemble est défini comme un sous-ensemble d'un ensemble défini précédemment ($\mathbb{N}$ comme sous-ensemble de $\mathbb{R}$). En revanche lorsque les opérateurs sont des constructeurs, les éléments de l'ensemble défini inductivement sont nouveaux (S(0) est une nouvelle valeur, égale seulement à elle-meˆme).

Nous pouvons maintenant définir la notion de définition inductive d'un ensemble E. Avant cela il est nécessaire de préciser la notion d'opérateur et de stabilité d'un ensemble par rapport à un opérateur :

Définition

- *Un opérateur f est un symbole muni d'une signature $F_1 \times \cdots \times F_n$, où les F_i sont des ensembles quelconques.*
- *On appelle n l'arité de f .*
- *On dit que l'application de f àdes arguments $x_1, \cdots, x_n$, notée $f(x_1, \cdots, x_m)$ est défini si $x_1 \in F_1, \cdots, x_n \in F_n$.*

Reprenons l'exemple (définition inductive de $\mathbb{N}$), on voit que S a bien pour signature $F_1 \times \cdots \times F_n$ avec n=1 et F=$\mathbb{N}$. La stabilité d'un ensemble E par rapport à un opérateur permet de définir formellement la notion de fermeture. La définition en toute généralité étant complexe, nous donnons 3 définitions successives de plus en plus générales : la stabilité pour un opérateur d'arité 1 dont l'argument appartient à E, puis pour un opérateur d'arité quelconque prenant tous ses arguments dans E, puis pour un opérateur d'arité quelconque ne prenant pas tous ses arguments dans E.

Définition

Un ensemble E est dit stable par rapport à l'opérateur f de signature E si $\forall x \in E, f(x) \in E$*. On écrit aussi* $f(E) \subseteq E$*.*
On généralise à $f : En \rightarrow U$ *:*

Définition

Un ensemble E est dit stable par rapport à l'opérateur f de signature E^n *si* $\forall e_1 \cdots e_n \in E, f(e_1, \cdots, e_n) \in E$*. On écrit aussi* $f(E^n) \subseteq E$*.*
On généralise à la signature $F_1 \times \cdots \times F_m \times E^n$*, qui couvre tous les opérateurs possibles modulo permutation des arguments :*

Définition

étant donné les ensembles $F_1 \cdots F_m$*, un ensemble* E *est dit stable par rapport à un opérateur* f *de signature* $F_1 \times \cdots \times F_m \times E^n$ *et par rapport aux ensembles* $F_1 \cdots F_m$*, si* $\forall x_1 \in F_1, \cdots, \forall x_m \in F_m, \forall e_1, \cdots, e_n \in E$*,* $f(x_1, \cdots, x_m, e_1, \cdots, e_n) \in E$*.*
On écrit aussi $f(F_1, \cdots, F_n, En) \subseteq E$*.*

Récurrence "faible"
Récurrence "forte"
Induction

Définition

Soient :

- *B un ensemble appelé base ; !*
- *Ω un ensemble d'opérateurs $\{\overrightarrow{f_i}\}$.*

On appelle fermeture inductive de B par Ω ou ensemble inductivement défini par $\langle B, \Omega \rangle$i l'ensemble E défini par le schéma suivant :
E est la plus petite partie de U telle que :

- *1. $B \subseteq E$;*
- *2. E est stable par rapport aux opérateurs de Ω.*

On voit que la définition de E fait appel à E lui-meˆme dans le point 2 ci-dessus. Pour cette raison, la fermeture inductive est parfois appelée fermeture récursive.

Exemple : Définition inductive des listes d'entiers $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$

- $B = \{Nil\}$
- $\Omega = \{Cons\}$ où Cons a pour signature $\mathbb{N} \times \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$

Exemples d'élément de $\mathcal{L}$: Nil, Cons(S(0),Nil), Cons(0,Cons(S(0),Nil))... On notera Cons(x,l) parfois dans la suite x : :l.

Le raisonnement d'induction permet de montrer des propriétés de le forme $\forall x \in E, P(x)$ pour un ensemble E défini par induction. Par exemple sur l'ensemble $\mathbb{N}$ défini dans l'exemple (Définition inductive de $\mathbb{N}$), on retrouve un principe d'induction semblable au principe de récurrence faible :

$$\forall P, \begin{pmatrix} P(0) \wedge \\ \forall x \in \mathbb{N}, P(x) \rightarrow P(S(x)) \end{pmatrix} \rightarrow \forall x \in \mathbb{N}, P(x)$$

Le principe est le suivant : pour prouver qu'une propriété est vraie pour tout élément d'un ensemble E défini par induction, il faut démontrer :

- Que P est vrai pour chaque élément de la base B_E (ici : P(0)) ;
- Les opérateurs préservent P (ici S préserve P : $\forall x \in \mathbb{N}, P(x) \rightarrow P(S(x))$). On dit aussi que P est une propriété héréditaire pour les opérateurs.

Plus généralement voici la forme du principe de raisonnement par induction sur un ensemble quelconque défini par induction :

Théorème

Soit $E = \langle B, \Omega \rangle$ *un ensemble défini par induction et* P *une propriété. Pour montrer* $\forall x \in E, P(x)$ *il suffit de démontrer :*

- *base :* $\forall x \in B, P(x)$ *;*
- *règles : pour chaque opérateur* $f \in \Omega$ *de signature* $F_1 \times \cdots \times F_m \times E^n$, *f préserve P, c'est-à-dire :* $\forall e_1, \cdots e_n \in E, P(e_1) \wedge \cdots \wedge P(e_n) \rightarrow \overrightarrow{\forall x \in F}_i, P(f(x_1, \cdots, x_m, e_1, \cdots, e_n))$.

Exemple : Principe de raisonnement par induction sur les listes d'entiers
D'après Le théorème précédent, le principe d'induction sur les listes d'entiers $\mathcal{L}$ de l'exemple (Définition inductive des listes d'entiers $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ est le suivant :

$$\forall P, \left(\begin{array}{c} P(Nil) \wedge \\ \forall l \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, P(Cons(n, l)) \end{array} \right) \rightarrow \forall l \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}, P(l)$$

On aura noté que le principe d'induction correspond à la récurrence faible transposée aux ensembles définis par induction. Il nous reste à définir l'équivalent de la récurrence forte transposée aux meˆmes ensem- bles. En fait l'induction ne se généralise pas uniquement sur les ensembles définis par induction mais sur *les ensembles munis d'un ordre bien fondé*. Sans entrer dans les détails ces deux notions sont en réalité assez proches.

Théorème

Soit E un ensemble et < un ordre bien fondé total sur E. Soit P une propriété sur les éléments de E. Pour montrer $\forall x \in E, P(x)$ *il suffit de démontrer que la propriété est héréditaire pour <, plus précisément :*

$$\forall P, (\forall e \in P, ((\forall x < e, P(x)) \rightarrow P(e))) \rightarrow \forall x \in E, P(x)$$

Ce principe se révèle bien adapté au raisonnement sur les fonctions récursives "non structurelles", c'est-à-dire dans lesquelles les appels récursifs se font sur des arguments plus petits selon un ordre ne correspondant pas à l'ordre inductif.

Exemple : D'après le théorème précédent ci-dessus, on peut définir un principe d'induction sur les listes d'entiers naturels à partir de l'ordre suivant bien fondé sur les listes :

$$l < l' \ ssi \ sum(l) <_{\mathbb{N}} sum(l').$$

$\forall P, (\forall l \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}, ((\forall l' \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}, t.q.sum(l') < sum(l), P(l'))$
$\rightarrow P(l))) \rightarrow \forall l \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}, P(l)$