Logique

L2 Informatique - UFR S.A.T

Pr. Ousmane THIARE

ousmane.thiare@ugb.edu.sn
http://www.ousmanethiare.com

16 avril 2020

Logique

Axiome. Un axiome est un énoncé supposé vrai à priori et que l'on ne cherche pas à démontrer.
Ainsi, par exemple, Euclide a énoncé cinq axiomes (« les cinq postulats d'Euclide »), qu'il a renoncé à démontrer et qui devaient être la base de la géométrie (euclidienne). Le cinquième de ces axiomes a pour énoncé : « par un point extérieur à une droite, il passe une et une seule droite parallèle à cette droite ». Un autre exemple d'axiomes est fourni par les (cinq) axiomes de Peano. Ceux-ci définissent l'ensemble des entiers naturels. Le cinquième axiome affirme que : « si P est une partie de $\mathbb{N}$ contenant 0 et telle que le successeur de chaque élément de P est dans P (le successeur de n est n + 1), alors P=$\mathbb{N}$ ». Cet axiome est appelé « l'axiome d'induction » ou encore « l'axiome de récurrence ». Ces énoncés ont en commun d'être « évidents » pour tout le monde.

Proposition (ou assertion ou affirmation). Une proposition est un énoncé pouvant être vrai ou faux. Par exemple, « tout nombre premier est impair » et « tout carré de réel est un réel positif » sont deux propositions. Il est facile de démontrer que la première est fausse et la deuxième est vraie. Le mot proposition est clair : on propose quelque chose, mais cela reste à démontrer.

Théorème. Un théorème est une proposition vraie (et en tout cas **démontrée** comme telle). Par abus de langage, le mot proposition désigne souvent, dans la pratique des cours de mathématiques, un théorème intermédiaire ou de moindre importance, et même on a tendance à appeler proposition la plupart des théorèmes pour réserver le mot théorème aux plus grands d'entre eux (théorème de Pythagore, ...). C'est d'ailleurs ce dernier point de vue que nous adopterons dans les chapitres ultérieurs (mais pas dans ce premier chapitre où le mot « proposition » aurait alors deux significations différentes).

Corollaire. Un corollaire à un théorème est un théorème qui est conséquence de ce théorème. Par exemple, dans le chapitre « continuité », le théorème des valeurs intermédiaires dit que l'image d'un intervalle de R par une fonction continue à valeurs réelles, est un intervalle de R. Un corollaire de ce théorème affirme alors que si une fonction définie et continue sur un intervalle de R à valeurs réelles, prend au moins une valeur positive et au moins une valeur négative alors cette fonction s'annule au moins une fois dans cet intervalle.

Lemme. Un lemme est un théorème préparatoire à l'établissement d'un théorème de plus grande importance.
Conjecture. Une conjecture est une proposition que l'on suppose vraie sans parvenir à la démontrer.
Les conjectures sont le moteur du progrès des mathématiques. Tel ou tel mathématicien a eu l'impression que tel ou tel résultat important était vrai et l'a énoncé sans pouvoir le démontrer, laissant à l'ensemble de la communauté mathématique le soin de le confirmer par une démonstration convaincante ou de l'infirmer.

Les conjectures suivantes sont célèbres :

- (conjecture de Fermat) Si n est un entier supérieur ou égal à 3, il n'existe pas d'entiers naturels tous non nuls x, y et z tels que $x^n + y^n = z^n$ (cette conjecture date du XVIIème siècle et il a été démontré récemment que ce résultat était vrai).
- (conjecture de Bertrand énoncée en 1845) Pour tout entier naturel non nul n, il existe un nombre premier p tel que n<p<2n (dans un premier temps, on ne sût pas si cette affirmation était vraie ou fausse et le problème resta ouvert pendant 5 ans jusqu'à ce que Tchebychev en démontre la véracité en 1850).

Définition. Une définition est un énoncé dans lequel on décrit les particularités d'un objet. On doit avoir conscience que le mot « axiome » est quelquefois synonyme de « définition ». Par exemple, quand vous lirez « définition d'un espace vectoriel », vous pourrez tout autant lire « axiomes de la structure d'espace vectoriel » et vice-versa.

Dans ce paragraphe, on étudie les propositions en tant que telles, et les liens qui peuvent exister entre elles, sans se préoccuper du contenu de ces propositions (ce qui sera l'objet de tous les chapitres ultérieurs).

On rappelle qu'une proposition est un énoncé pouvant être vrai ou faux. On dit alors que les deux **valeurs de vérité** d'une proposition sont « vrai » et « faux ». A partir d'une ou plusieurs propositions, on peut en construire d'autres. C'est l'objet des paragraphes suivants.

Définition

Deux propositions équivalentes P et Q sont deux propositions simultanément vraies et simultanément fausses.

On dira par la suite que deux propositions équivalentes sont deux propositions ayant les mêmes valeurs de vérité. Cette phrase peut se visualiser dans un tableau appelé table de vérité dans lequel on fait apparaître les différentes valeurs de vérité possibles pour le couple (P, Q) (Vrai et Vrai, Vrai et Faux, ...) et, en correspondance, les valeurs de vérité de la proposition $P \iff Q$.

Vocabulaire usuel
Calcul propositionnel
Implication logique
Les quantificateurs ∀ et ∃
Les grands types de raisonnement
Erreurs classiques à ne pas commettre

Ainsi, la table de vérité de l'équivalence logique $P \iff Q$ est :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Vous devez lire en première ligne de ce tableau que si les propositions P et Q sont vraies, la proposition $P \iff Q$ est vraie, et en deuxième ligne, que si P est vraie et Q est fausse, $P \iff Q$ est fausse.

L'équivalence logique joue pour les propositions, le rôle que joue l'égalité pour les nombres. Les expressions 3+2 et 5 ne sont pas identiques et pourtant on écrit 3+2=5. De même, les propositions $(x^2 = 1)$ et (x=1 ou x=-1) ne sont pas identiques et pourtant on écrit $(x^2 = 1) \Longleftrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = -1)$.

Soit P une proposition. On définit sa négation, notée $\overline{P}$ (ou aussi nonP ou $\neg$P), à partir de sa table de vérité.

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

Cette simple table contient en germe un très grand nombre d'erreurs de raisonnement à venir et ceci dans à peu près tous les chapitres. On doit déjà avoir conscience que la négation de « ce chat est blanc » est, non pas « ce chat est noir », mais tout simplement « ce chat n'est pas blanc » ou que le contraire de la phrase « f est la fonction nulle » est, non pas « f ne s'annule pas », mais « f n'est pas la fonction nulle » ou encore « f ne s'annule pas en au moins un point ». Enfin, le contraire de la phrase « $x \geq 0$ » est « x < 0 », et non pas « x$\leq$ 0 ».

Théorème

Soit P une proposition. $\overline{\overline{P}} \Longleftrightarrow P$.

Démonstration. Il est clair que $\overline{\overline{P}}$ et P ont les mêmes valeurs de vérité.

Soient P et Q deux propositions. On peut définir les propositions « P ou Q », notée $P \vee Q$, et « P et Q », notée $P \wedge Q$ par les tables de vérité ci-dessous.

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$\Rightarrow$ **Commentaire.**

- On peut noter que $P \vee Q$ est fausse si et seulement si P et Q sont fausses alors que $P \wedge Q$ est vraie si et seulement si P et Q sont vraies.
- Il existe en français deux significations du mot « ou ». Il y a le « ou exclusif » qui signifie « soit l'un, soit l'autre, mais pas les deux » et le « ou inclusif » qui signifie « soit l'un, soit l'autre, soit les deux ». ? est le « ou inclusif ».

Théorème

Soit P une proposition. $P \wedge P \iff P$ *et* $P \vee P \iff P$.

Démonstration. $P \wedge Q$ et $P \vee Q$ sont vraies quand P est vraie et fausses sinon.

Théorème

(Loi de Morgan)
Soient P et Q deux propositions. $\overline{P \wedge Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$ *et* $\overline{P \vee Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$.

Démonstration. On démontre ces équivalences à l'aide de tables de vérité.

P	Q	$P \wedge Q$	$\overline{P \wedge Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \vee \overline{Q}$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

P	Q	$P \vee Q$	$\overline{P \vee Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \wedge \overline{Q}$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Dans chaque table, on lit effectivement les mêmes valeurs de vérité dans les quatrième et septième colonnes.

Dans chaque table, on lit effectivement les mêmes valeurs de vérité dans les quatrième et septième colonnes. $\Rightarrow$ **Commentaire.** A partir de ces résultats, on peut se convaincre que tout énoncé peut s'écrire en utilisant uniquement la conjonction $\wedge$ et la négation (par exemple, au paragraphe suivant, on verra que la proposition $P \Longleftrightarrow Q$ est la proposition $(\overline{P \wedge \overline{Q}}) \wedge (\overline{Q \wedge \overline{P}})$). Ce résultat a une importance en électronique et en informatique.

Théorème

Soient P, Q et R trois propositions.

- $P \wedge Q \iff Q \wedge P$ *et* $P \vee Q \iff Q \vee P$
- $(P \wedge Q) \wedge R \iff P \wedge (Q \wedge R)$ *et*
  $(P \vee Q) \vee R \iff P \vee (Q \vee R)$
- $(P \wedge Q) \vee R \iff (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ *et*
  $(P \vee Q) \wedge R \iff (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$

(On dit que le « ou » et le « et » sont commutatifs, associatifs et distributifs l'un sur l'autre.)

Vocabulaire usuel
Calcul propositionnel
Implication logique
Les quantificateurs ∀ et ∃
Les grands types de raisonnement
Erreurs classiques à ne pas commettre

Démonstration. Démontrons par exemple la première équivalence du 3ème point précédent à l'aide d'une table de vérité (vous démontrerez le reste de manière analogue à titre d'exercice).

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \vee R$	$P \vee R$	$Q \vee R$	$(P \vee R) \wedge (Q \vee R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	F	F	V	F
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	F

On lit effectivement les mêmes valeurs de vérité dans les cinquième et huitième colonnes.
Vous noterez la manière dont on a rempli les trois premières colonnes. Cette méthode de remplissage permet de n'oublier aucune situation.

Si P et Q sont deux propositions, on définit l'implication logique : $P \Rightarrow Q$ par sa table de vérité.

P	Q	P $\Rightarrow$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Théorème

Soient P et Q deux propositions. $(P \Rightarrow Q) \iff (\overline{P} \vee Q)$

Démonstration. $P \Rightarrow Q$ est fausse dans l'unique cas où P est vraie et Q est fausse ou encore quand $\overline{P}$ et Q sont toutes deux fausses. $P \Rightarrow Q$ a donc les mêmes valeurs de vérité que $(\overline{P} \vee Q)$.

Vient maintenant une règle essentielle pour mener des démonstrations.

Théorème

(Transitivité de l'implication)
Soient P, Q et R trois propositions.

$$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R).$$

Démonstration. Vous démontrerez ce théorème à l'aide d'une table de vérité à 8 lignes. On relie l'équivalence logique à l'implication logique par le théorème suivant :

Théorème

(Propositions équivalentes)
Soient P et Q deux propositions. Alors,
$(P \iff Q) \iff ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$.

Démonstration. Il s'agit de vérifier que les deux propositions $P \iff Q$ et $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ ont les mêmes valeurs de vérité.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

C'est un moment important. Une équivalence signifie deux implications, l'une de « gauche à droite » et l'autre de « droite à gauche ».
Quand vous écrivez $P \Longleftrightarrow Q$, vous devez être convaincu que la proposition de gauche P entraîne la proposition de droite Q et aussi que la proposition de droite Q entraîne la proposition de gauche P.
Occupons nous maintenant d'analyser la table de vérité de l'implication. Les deux dernières lignes de cette table de vérité peuvent paraître surprenantes (comment peut-il être vrai qu'une phrase fausse implique une phrase fausse ou aussi une phrase vraie ?) L'exemple suivant fera comprendre « (Faux $\Rightarrow$ Faux) est vraie ».

Vocabulaire usuel
Calcul propositionnel
Implication logique
Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$
Les grands types de raisonnement
Erreurs classiques à ne pas commettre

Vérifions que, pour tout entier naturel n, $[(10^n + 1 divisiblepar 9) \Rightarrow (10^{n+1} + 1 divisiblepar 9)]$. Soit $n \in \mathbb{N}$. La condition « $10^n + 1$ divisible par 9 » fournit un entier naturel K tel que $10^n + 1 = 9K$. Maintenant, puisque $10^{n+1} + 1 = 10x10^n + 1 = 10x(10^n + 1) - 10 + 1 =$ $10x(10^n + 1) - 9 = 10x9K - 9 = 9(10K - 1)$ on obtient comme conséquence de l'hypothèse initiale le fait que l'entier $10^{n+1} + 1$ est divisible par 9. L'implication proposée est totalement exacte et pourtant, aucune des deux phrases encadrant cette implication ne sont vraies (puisque les nombres 2, 11, 101, 1001... ne sont à l'évidence pas divisibles par 9). D'ailleurs, en écrivant cette implication, nous ne nous sommes jamais demandé si la première phrase écrite était vraie. Il est important de le comprendre pour être capable le moment venu de gérer correctement le raisonnement par récurrence.

Pour comprendre « (Faux$\Rightarrow$ Vrai) est vraie », on se contentera de l'exemple suivant :

$$2 = 3 \text{ et } 2 = 1 \Rightarrow 2 + 2 = 3 + 1 \Rightarrow 4 = 4.$$

L'affirmation de départ est fausse et on en de ?duit (tout à fait par hasard mais par un raisonnement tout à fait juste) une affirmation vraie. L'affirmation finale est vraie, mais ce ne sont pas les implications écrites qui la démontrent.
Une conséquence pratique de cette étude est que, si votre hypothèse de départ est fausse bien que par la suite vous teniez des raisonnements entièrement justes, vous n'avez aucune idée en fin de raisonnement de la véracité ou de la fausseté des conclusions auxquelles vous êtes parvenu(e) (réfléchissez-y avant d'aller réclamer à votre professeur des points pour un résultat final et un raisonnement intermédiaire entièrement justes).

Les expressions « Condition nécessaire et suffisante (CNS) », « si et seulement si (ssi) », « il faut et il suffit » signifient toutes « logiquement équivalent » ou encore « $\Longleftrightarrow$ ». Mais plus précisément, dans chacune de ces expressions, quel morceau correspond à « $\Rightarrow$ » et quel autre morceau correspond à « $\Leftarrow$ » ? La réponse est fournie par le tableau suivant :

$\Rightarrow$	$\Leftarrow$
condition nécessaire	condition suffisante
il faut	il suffit
seulement si	si

Considérons par exemple l'implication vraie : ($n \geq 3$ et n premier) $\Rightarrow$ n impair. Si on cherche à l'énoncer dans le langage courant, on dira : pour que n soit un nombre premier supérieur ou égal à 3, il est nécessaire, il est obligatoire, il faut que n soit impair, mais on peut dire aussi que n peut être un nombre premier supérieur ou égal à 3 seulement si n est impair.
Mais si l'on considère l'implication contraire (qui est fausse) à savoir : n impair $\Rightarrow$ (n$\geq$ 3 et n premier), on dira que pour que n soit un nombre premier supérieur ou égal à 3, il n'est pas suffisant, il ne suffit pas que n soit impair ou encore, si n est impair, n n'est pas nécessairement un nombre premier supérieur ou égal à 3

Considérons encore l'implication vraie :
$(x+1)^2 = 9 \Leftarrow x+1 = 3$. Pour que $(x+1)^2$ soit égal à 9, il suffit, il est suffisant que x+1 soit égal à 3, ou encore $(x+1)^2$ vaut 9 si x+1 vaut 3. Mais, pour que $(x+1)^2$ soit égal à 9, il n'est pas nécessaire, il n'est pas obligatoire que x+1 soit égal 3 (car x+1 peut aussi être égal à -3) ou encore l'égalité $(x+1)^2 = 9$ ne se produit pas seulement si x+1 vaut 3 (l'implication $(x+1)^2 = 9 \Rightarrow x+1 = 3$ est fausse).

Théorème

(Négation d'une implication)
Soient P et Q deux propositions. $\overline{P \Rightarrow Q} \Longleftrightarrow P \wedge \overline{Q}$

Démonstration. D'après les lois de De Morgan et le théorème Définition de l'implication logique, on a :

$$\overline{P \Rightarrow Q} \Longleftrightarrow \overline{P \vee \overline{Q}} \Longleftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{\overline{Q}} \Longleftrightarrow \overline{P} \wedge Q.$$

Théorème

(Contraposée d'une implication)
Soient P et Q deux propositions. $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}) \Longleftrightarrow (P \Rightarrow Q)$

Démonstration. La proposition $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est fausse si et seulement si $\overline{Q}$ est vraie et $\overline{P}$ est fausse ou encore si et seulement P est vraie et Q est fausse. Ainsi, $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ a les mêmes valeurs de vérité que $P \Rightarrow Q$

Définition

(Contraposée d'une implication)
Soient P et Q deux propositions. L'implication
$(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}) \Longleftrightarrow (P \Rightarrow Q)$

La contraposée d'une implication est équivalente à celle-ci. Ceci fournira plus loin un type de raisonnement usuel : le raisonnement par contraposition.

Définition

(Réciproque d'une implication)
Soient P et Q deux propositions. L'implication $Q \Rightarrow P$ s'appelle la réciproque (ou l'implication réciproque) de l'implication $P \Rightarrow Q$.

Implication logique

Négation, contraposée et réciproque d'une implication

- La négation de $(P \Rightarrow Q)$ est $(P \wedge \overline{Q})$
- La contraposée de $(P \Rightarrow Q)$ est $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$
- La réciproque de $(P \Rightarrow Q)$ est $(Q \Rightarrow P)$

Par exemple, (pour $n \geq 2$), l'implication (n premier et $n \neq 2$)$\Rightarrow$ (n impair) (I) est vraie.
La contraposée de l'implication (I) est : (n pair)$\Rightarrow$ (n=2 ou n non premier) et est (obligatoirement) vraie.
La réciproque de l'implication (I) est : (n impair)$\Rightarrow$ (n premier et $n \neq 2$) et est fausse (puisque 9 n'est pas premier).

De manière générale, la contraposée de $P \Rightarrow Q$ à savoir $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est équivalente à $P \Rightarrow Q$ et a donc même valeurs de vérité, la négation de $P \Rightarrow Q$ à savoir $P \wedge \overline{Q}$ a des valeurs de vérité contraires. La véracité de la réciproque de $P \Rightarrow Q$ à savoir $Q \Rightarrow P$ n'a quant à elle aucun rapport avec celle de $P \Rightarrow Q$. Ces deux implications sont vraies ou fausses de manière totalement indépendantes.

On se donne un ensemble E et P(x) une proposition dont les valeurs de vérité sont fonction des éléments x de E. Par exemple, considérons la proposition « $x^2 = 1$ » dépendant d'un réel x. On ne peut pas dire que la phrase $x^2 = 1$ est vraie ou fausse tant qu'on ne sait pas ce que vaut x. Une telle proposition, dont les valeurs de vérité sont fonction d'une (ou plusieurs) variable(s)s'appelle un **prédicat**. Nous n'utiliserons plus ce terme par la suite. Cette proposition est vraie quand x=1 ou quand x=-1et est fausse dans les autres cas ou encore, la proposition « $x^2 = 1 \iff$ (x=1 ou x=-1) » est vraie pour tout choix du réel x.

De manière générale :

Définition

- *La proposition : « Pour tous les éléments x de E, la proposition P(x) est vraie » s'écrit en abrégé : « $\forall x \in E, P(x)$ ».*
- *La proposition : « il existe au moins un élément x de E tel que la proposition P(x) est vraie » s'écrit en abrégé : « $\exists x \in E/P(x)$ » ou aussi « $\exists x \in E, P(x)$ ».*
- *La proposition : « il existe un et un seul élément x de E tel que la proposition P(x) est vraie » s'écrit en abrégé : « $\exists! x \in E, P(x)$ ».*

(Dans «$\exists x \in E/P(x)$ » ou « $\exists x \in E, P(x)$ », le / ou la virgule se lisent donc « tel que »).

Définition

∀ s'appelle le quantificateur universel et ∃ s'appelle le quantificateur existentiel.

⇒ **Commentaire.** Les symbôles ∀ et ∃ sont le A (initiale de « all » (tous en anglais)) et le E (« exists ») que l'on a retournés.

- **Exercice 1.** Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :
  - 1. f est la fonction nulle (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
  - 2. Le dénominateur D de f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.
  - 3. f est l'identité de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire la fonction qui, à chaque réel, associe lui-même).
  - 4. Le graphe de f coupe la droite d'équation y = x
  - 5. f est croissante sur $\mathbb{R}$ (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
  - 6. L'équation sin x = x a une et une seule solution dans $\mathbb{R}$.
  - 7. Pour tout point M du plan $\mathcal{P}$, M est sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon R si et seulement si la distance de M à Ω vaut R.

- **Solution.**
  - 1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$
  - 2. $\exists x \in \mathbb{R} / D(x) = 0$
  - 3. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$
  - 4. $\exists x \in \mathbb{R} / f(x) = x$
  - 5. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b))$
  - 6. $\exists ! x \in \mathbb{R} / sin(x) = x$
  - 7. $\forall M \in \mathcal{P}, (M \in \mathcal{C} \iff \Omega M = R$

$\Rightarrow$ **Commentaire.** En 5), il ne faut pas lire que pour tout couple (a,b) de réels, on a $a \leq b$ ou encore, il ne faut pas lire $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b))$. Mais, il faut lire que pour tout couple (a, b) de réels, l'implication $(a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b))$ est vraie.

De la même façon, en 7), il ne faut pas lire que tout point du plan est sur le cercle (ou encore il ne faut pas lire $\forall M \in \mathcal{P}, (M \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow$ ... mais il faut lire que pour tout point du plan, il est équivalent de dire que M est sur le cercle et que $\Omega M = R$. Dans cette phrase, le point M a la possibilité de ne pas être sur le cercle.

Exercice 2. Montrer que : $\exists x \in \mathcal{R}/sin(x) = x$

Solution.

sin(0)=0. Donc $\exists x \in \mathcal{R}/sin(x) = x$

$\Rightarrow$ **Commentaire.** Pour montrer la phrase $\exists x \in E/\mathcal{P}(x)$, la plupart du temps, **on fournit explicitement** un élément précis x_0 de E vérifiant la propriété désirée.

Théorème

Soient E un ensemble et P(x) une proposition dont les valeurs de vérité sont fonction des éléments x de E.

- $\overline{(\forall x \in E, P(x))} \Longleftrightarrow (\exists x \in E, \overline{P(x)})$
- $\overline{(\exists x \in E, P(x))} \Longleftrightarrow (\forall x \in E, \overline{P(x)})$

("Le contraire de $\forall$ est $\exists$ et le contraire de $\exists$ est $\forall$"). Par exemple, nous écrirons plus tard la définition d'une fonction f continue en un réel x_0 :
f est continue en $x_0 \Longleftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in D_f, (|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$

Le théorème précédent permettra de fournir mécaniquement la définition de : « f n'est pas continue en x_0 », en niant la phrase précédente.
f n'est pas continue en $x_0 \iff (\exists\epsilon > 0, \forall\alpha > 0 / \exists x \in D_f, (|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon)$
(0n rappelle que la négation de $P \Rightarrow Q$ est $P \wedge \overline{Q}$ et que la négation de < est $\geq$. D'autre part, la négation de $\forall\epsilon > 0$, est $\exists\epsilon > 0/$ et non pas $\exists\epsilon \leq 0/$. De manière générale, la négation de $\forall x \in E...$ est $\exists x \in E/...$

- **Exercice 3.** Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :
  - 1. f n'est pas nulle (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
  - 2. Le dénominateur D de la fraction ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
  - 3. f n'est pas l'identité de $\mathbb{R}$ (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
  - 4. f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

- **Solution.**
  - 1. $\exists x \in \mathbb{R} / f(x) = 0$
  - 2. $\forall x \in \mathbb{R} / D(x) \neq 0$. Vous constaterez que les phrases « le dénominateur ne s'annule pas » et « le dénominateur n'est pas nul » n'ont pas du tout la même signification.
  - 3. $\exists x \in \mathbb{R} / f(x) \neq x$
  - 4. $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a \leq b$ et $f(a) > f(b))$. Ici, il a fallu nier l'implication $(a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b))$.

- **Exercice 4.**
  - 1. Montrer que la fonction sin n'est pas nulle.
  - 2. Montrer que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.
- **Solution.**
  - 1. $sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \neq 0$. Donc, $sin \neq 0$
  - 2. La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0 et donc n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ **Commentaire.**

- Dire qu'une fonction f est la fonction nulle équivaut à dire : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$. Dire que f n'est pas nulle équivaut donc à dire : $\exists x \in \mathbb{R} / f(x) \neq 0$. Dire qu'une fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ équivaut à dire : $\forall x \in \mathbb{R}$, f est dérivable en x. Dire que f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$ équivaut donc à dire : $\exists x \in \mathbb{R} / f$ n'est pas dérivable en x.
- Comme nous l'avons dit plus plus haut, pour montrer une phrase du type : $\exists x \in \mathbb{R} / \ldots$, on fournit explicitement un réel x tel que .... En 1., nous avons fourni le réel $\frac{\pi}{2}$ et en 2., le réel 0.

Passons maintenant aux rapports qu'entretiennent les quantificateurs ∀ et ∃ avec les connecteurs logiques et et ou.

Théorème

Soient E un ensemble et P(x) une proposition dont les valeurs de vérité sont fonction des éléments x de E.

1. $(\forall x \in E,\ P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow ((\forall x \in E/\ P(x)) \wedge (\forall x \in E,\ Q(x)))$.
2. $(\forall x \in E,\ P(x) \vee Q(x)) \underset{\Leftarrow}{\overset{\not\Rightarrow}{}} ((\forall x \in E/\ P(x)) \vee (\forall x \in E,\ Q(x)))$.
3. $(\exists x \in E,\ P(x) \wedge Q(x)) \underset{\not\Leftarrow}{\overset{\Rightarrow}{}} ((\exists x \in E,\ P(x)) \wedge (\exists x \in E,\ Q(x)))$.
4. $(\exists x \in E,\ P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow ((\exists x \in E,\ P(x)) \vee (\exists x \in E,\ Q(x)))$.

Dans 2 et 3, on ne trouve pas d'équivalence mais seulement une implication. Pour le comprendre, commençons par analyser le langage courant. La phrase « dans la classe, il existe une personne qui est un garçon et une autre personne qui est une fille » est vraie mais une même personne ne peut jouer les deux rôles à la fois ou encore la phrase « il existe un élève qui est un garçon et une fille » est fausse. De même, la phrase « dans la classe, tout élève est un garçon ou une fille » est vraie mais la phrase « dans la classe, tout élève est un garçon ou tout élève est une fille » est fausse.

Etudions un exemple « plus mathématique », et pour cela, considérons les deux propositions

$$(\exists x \in \mathbb{R}/cosx = 0) \text{ et } (\exists x \in \mathbb{R}/sinx = 0),$$

et

$$(\exists x \in \mathbb{R}/cosx = 0 \text{ et } sinx = 0)$$

La première proposition est vraie car 0 est un réel x tel que sinx = 0 et $\frac{\pi}{2}$ est un réel x tel que cosx = 0. Ainsi, dans les deux affirmations $(\exists x \in \mathbb{R}/cosx = 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R}/sinx = 0)$, la lettre x utilisée deux fois **ne désigne pas forcément un même nombre.** La deuxième proposition est clairement fausse (car par exemple $\forall x \in \mathbb{R}, cos^2x + sin^2x = 1 \neq 0$).

Etudions un autre exemple. On rappelle qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est monotone si et seulement si elle est croissante ou décroissante sur $\mathbb{R}$. Ceci s'écrit avec des quantificateurs :

$(\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2, (a \leq b \implies f(a) \leq f(b)))$ ou $(\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2, (a \leq b \implies f(a) \geq f(b)))$,

et ne s'écrit sûrement pas

$(\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2, (a \leq b \implies f(a) \leq f(b)$ ou $f(a) \geq f(b))$,

cette deuxième phrase étant, elle, vérifiée par toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Encore un exemple. On considère deux fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f \times g = 0$. Peut-on affirmer que l'on a f=0 ou g=0 ? La réponse est non. Il suffit de considérer deux fonctions non nulles f et g telles que, à chaque fois que ?f ne s'annule pas, ce soit g qui s'annule.

Par exemple, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à tout x associe

$$\begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à tout x associe

$$\begin{cases} x \text{ si } x \leq 0 \\ 0 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Pour ces deux fonctions f et g, si x est un élément de $]-\infty, 0[$, $f(x)g(x) = 0 \times x = 0$ et si x est un réel élément de $[0, +\infty[$, $f(x)g(x) = x \times 0 = 0$.

Revenons à des fonctions quelconques f et g et exprimons ce qui précède avec des quantificateurs.
$fg = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}, f(x)g(x) = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0) \qquad (I),$
alors que $f = 0$ ou $g = 0 \iff (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0) \qquad (II),$
Les propositions (I) et (II) ne sont pas les mêmes et encore une fois, on ne peut donc pas distribuer $\forall$ sur le mot ou. Dans la phrase (I), « le mot ou est une fonction de x » et en faisant varier x, c'est tantôt f(x) qui peut être nul et tantôt g(x). Ce n'est pas le cas dans la phrase (II).
On peut distribuer $\forall$ sur «et» et $\exists$ sur «ou»mais on ne peut pas distribuer $\forall$ sur « ou » et $\exists$ sur « et ».

Pour mémoriser ce dernier cas (les autres cas s'en déduisent), on pourra se rappeler que dans un lycée, il existe un garçon beau et il existe un garçon intelligent mais qu'il est plus difficile de trouver un (même) garçon beau et intelligent à la fois.

- **Exercice 5.** Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :
  - 1) a) Tout entier naturel est pair ou impair.
    b) Tout entier naturel est pair ou tout entier naturel est impair.
  - 2) a) f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$ (où f désigne une foncftion de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
    b) f n'est pas strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

- **Solution.**
  - 1) a) $\forall n \in \mathbb{N}$, (n est pair ou n est impair)
    b) ($\forall n \in \mathbb{N}$, n est pair) ou ($\forall n \in \mathbb{N}$, n est impair).
  - 2) a) $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a < b \Rightarrow f(a) < f(b)))$ ou $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a < b \Rightarrow f(a) > f(b)))$.
    b) $(\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a < b \text{ et } f(a) \geq f(b)))$ et $(\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a < b \text{ et } f(a) \leq f(b)))$.

$\Rightarrow$ **Commentaire.**

- Le 1) doit de nouveau convaincre que l'on ne peut pas distribuer $\forall$ sur « ou ». En a), chaque fois que l'on se donne un entier n, ou bien la phrase « n est pair » est vraie, ou bien la phrase « n est impair » est vraie. Par suite, la phrase « n est pair ou n est impair » est vraie. Par contre, en b), la phrase « $\forall n \in \mathbb{N}$, n est pair » est fausse et la phrase « $\forall n \in \mathbb{N}$, n est impair » est fausse. En conséquence, la phrase « ($\forall n \in \mathbb{N}$, n est pair) ou ($\forall n \in \mathbb{N}$, n est impair) » est fausse. Les affirmations a) et b) ne sont pas les mêmes.

$\Rightarrow$ **Commentaire.**

- Une fois que l'on est mis en garde sur l'utilisation de $\forall$ et « ou », la définition correcte d'une fonction monotone doit sortir naturellement. Cette définition n'est en aucun cas : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a \leq b \Rightarrow (f(a) < f(b)$ ou $f(a) > f(b))$ La négation de cette définition s'obtient alors mécaniquement. Il s'agit d'un calcul sur les symboles $\forall, \Rightarrow, \wedge$... et ce chapitre a pour but d'en exposer les règles. Une fois, ces règles et leurs significations acquises, il n'est plus besoin de réfléchir pour manipuler ces différents objets, de même que l'on ne réfléchit plus depuis longtemps (à tort) à la signification d'égalités du genre $9 \times 8 = 72$ ou 2(x+y)=2x+2y ou $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{6}$

Dans ce qui suit, P(x, y) désigne une proposition dont les valeurs de vérité dépendent de deux variables x et y comme par exemple la proposition 2x + y > 0 pour x et y réels donnés. Cette affirmation est vraie si le point de coordonnées (x, y) est strictement au-dessus de la droite d'équation y = -2x et fausse sinon.

Théorème

- $((\forall x \in E), (\forall y \in E), P(x, y)) \Longleftrightarrow ((\forall y \in E), (\forall x \in E), P(x, y))$
- $((\exists x \in E), (\exists y \in E), P(x, y)) \Longleftrightarrow ((\exists y \in E), (\exists x \in E), P(x, y))$

On peut permuter des quantificateurs de même nature.

$\Rightarrow$ **Commentaire.** On verra dans la suite que l'on note E^2 l'ensemble des couples d'éléments de E. La phrase $((\forall x \in E), (\forall y \in E), P(x,y))$ peut alors s'écrire plus simplement $\forall(x,y) \in E^2, P(x,y)$ et la phrase $((\exists x \in E), (\exists y \in E), P(x,y))$ peut alors s'écrire plus simplement $\exists(x,y) \in E^2, P(x,y)$

On vient d'affirmer que l'on peut permuter des quantificateurs de même nature mais "On ne peut pas permuter des quantificateurs de natures différentes".

Théorème

$$((\exists x \in E)/\ (\forall y \in E,\ P(x,y))) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} (\forall y \in E,\ \exists x \in E/\ P(x,y)).$$

Quand on écrit $\exists x / \forall y$ l'élément x est fourni une bonne fois pour toutes **avant** les y et est donc **constant** quand y varie.
Quand on écrit $\forall y, \exists x$ l'élément x est fourni **après** chaque y.
Il dépend de y et **peut donc varier** quand y varie.
Par exemple, en algèbre linéaire, vous aurez un jour à résoudre l'exercice suivant (dont vous ne pouvez pas necore comprendre le contenu) : « Soient E un espace vectoriel et f une application linéaire de E dans lui-même vérifiant $\forall \vec{u} \in E, \exists \lambda \in \mathbb{R} / f(\vec{u}) = \lambda \vec{u} \quad (*)$. Montrer que f est une homothétie vectorielle $(\exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall \vec{u} \in E, f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}))$ ».
Résoudre cet exercice consistera à montrer que le réel λ fourni dans $(*)$ est en fait indépendant du vecteur $\vec{u}$ ou encore que ce réel ne varie pas quand $\vec{u}$ varie.

Exercice 6. Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

- 1.
  - a. f est constante sur $\mathbb{R}$ (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
  - b. f n'est pas constante sur $\mathbb{R}$.
- 2.
  - a. f est une homothétie (où f est une transformation du plan $\mathcal{P}$).
  - b. f n'est pas une homothétie.
- 3.
  - a. Pour chaque entier, on peut trouver un entier strictement plus grand (cette affirmation est vraie).
  - b. Il y a un entier plus grand que tous les entiers (cette affirmation est fausse).

Solution.

- 1.
  - a. $\exists C \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = C$, ou encore plus simplement, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0)$.
  - b. $\forall C \in \mathbb{R} / \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq C$, ou encore plus simplement, $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq f(0)$.
- 2.
  - a. $\exists k \in \mathbb{R}, \exists \Omega \in \mathcal{P} / \forall M \in \mathcal{P}, \overrightarrow{\Omega f(M)} = k\overrightarrow{\Omega M}$
  - b. $\forall k \in \mathbb{R}, \forall \Omega \in \mathcal{P} / \exists M \in \mathcal{P}, \overrightarrow{\Omega f(M)} \neq k\overrightarrow{\Omega M}$
- 3.
  - a. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} / m > n$
  - b. $\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} / m > n$

$\Rightarrow$ **Commentaire.**

- La définition correcte d'une fonction constante, donnée en 1., est à mémoriser. Elle sera par exemple utile pour calculer des primitives ou plus généralement pour résoudre certaines équations différentielles. Cette définition n'est sûrement pas $\forall x \in \mathbb{R}, \exists C \in \mathbb{R} / f(x) = C \quad (*)$. Cette dernière affirmation est vérifiée par toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, car malheureusement, l'ordre $\forall x, \exists C$ permet au nombre C de changer de valeur quand x change lui-même de valeur. Accessoirement, on doit noter que le phrase $\forall x \in \mathbb{R}, f = cte$ est une version catastrophique de la phrase $(*)$, phrase qui était déjà fausse.

$\Rightarrow$ **Commentaire.**

- Le problème est identique en 2.a) et en 3.. En 2.a), le centre Ω et le rapport k doivent être indépendants du point variable M. Le bon ordre est donc $\exists k, \exists \Omega / \forall M$.... En 3., on sait bien que seul a) est vrai. Ainsi, pour chaque n, on peut fournir un m dépendant de n et strictement plus grand que n, et c'est ce que l'on a fait : l'entier m=n+1 est effectivement variable quand n varie.

Le schéma du raisonnement déductif est le suivant : Quand P est une proposition vraie, et $P \Rightarrow Q$ est une proposition vraie, on peut affirmer que Q est une proposition vraie.
Un résultat connu comme étant vrai (c'est à dire un théorème) ne peut entraîner qu'un autre résultat vrai. Cette règle est connue sous le nom de « modus ponens ». C'est le raisonnement de base que vous reproduirez un grand nombre de fois. Et même, vous tiendrez ce raisonnement tellement de fois (ou encore, vous serez tellement souvent dans la situation où l'hypothèse P est vraie) que vous risquez à terme de commettre une confusion entre la phrase simple « $P \Rightarrow Q$ est vraie » et la phrase plus complète « P est vraie et $P \Rightarrow Q$ est vraie ». Seule la deuxième permet d'affirmer que Q est vraie.

Sachant de plus que l'implication est transitive, une démonstration prend très souvent la forme suivante : P est vraie et $P \Rightarrow Q \Rightarrow R \Rightarrow ... \Rightarrow S \Rightarrow T$ est vraie, et on a donc montré que T est vraie.

On veut montrer qu'une proposition P est vraie. On suppose que c'est sa négation $\overline{P}$ qui est vraie et on montre que cela entraîne une proposition fausse. On en conclut que P est vraie (puisque Q est fausse, l'implication $\overline{P} \Rightarrow Q$ ne peut être vraie que si $\overline{P}$ est fausse ou encore si P est vraie). Le schéma du raisonnement par l'absurde est le suivant :

Quand $\overline{P} \Rightarrow Q$ est une proposition vraie, et Q est une proposition fausse, on peut affirmer que P est une proposition vraie.

Exemple. Montrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Il existe alors deux entiers naturels non nuls a et b tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ou encore $a^2 = 2b^2$. Maintenant, dans la décomposition en facteurs premiers de l'entier a^2 (qui est à l'évidence supérieur à 2), le nombre premier 2 apparaît à un exposant pair (si $a = 2^{\alpha} \times ...$ alors, $a^2 = 2^{2\alpha} \times ...$) alors qu'il apparaît à un exposant impair dans $2b^2$ (si $b = 2^{\beta} \times ...$ alors, $2b^2 = 2^{2\beta+1} \times ...$). Si l'on admet l'unicité de la décomposition en facteurs premiers d'un entier naturel supérieur à 2 (unicité qui sera démontrée plus tard dans ce cours), l'égalité des nombres a^2 et $2b^2$ est donc impossible. Par suite, l'hypothèse faite ($\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$) est absurde et on a montré (par l'absurde) que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Le schéma est le suivant :
Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ est une proposition vraie, il (faut et) il suffit de montrer que $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est une proposition vraie.

Exemple. Soient k et k' deux entiers naturels non nuls. Montons que $(kk' = 1 \Rightarrow k = k' = 1)$. Supposons que $k \neq 1$ ou $k' \neq 1$. Alors, on a $(k \geq 2$ et $k' \geq 1)$ ou $(k \geq 1$ et $k' \geq 2)$. Dans les deux cas, on a $kk' \geq 2$ et en particulier, $kk' \neq 1$. Donc,

$$(k \neq 1 \text{ ou } k' \neq 1) \Rightarrow (kk' \neq 1).$$

Par contraposition, on a montré que

$$(kk' = 1) \Rightarrow (k = 1 \text{ et } k' = 1)$$

Erreurs classiques à ne pas commettre

- Croire que le contraire de $x \geq 0$ est $x \leq 0$. Le contraire de $x \geq 0$ est x<0.
- Confondre $\Rightarrow$ et $\Longleftrightarrow$. **Une équivalence est constituée de deux implications.**
- Refuser l'usage des quantificateurs $\forall$ et $\exists$. Par exemple, la phrase $sin(x) \neq x$ n'a pas de sens. Signifie-t-elle $\forall x \in \mathbb{R}, sin(x) \neq x$, auquel cas elle est fausse car sin(0) = 0, ou signifie-t-elle que la fonction sinus n'est pas la fonction $x \mapsto ??x$, auquel cas elle devrait être proprement écrite sous la forme $x \in \mathbb{R}/sin(x) \neq x$ ou aussi $sin \neq Id_{\mathbb{R}}$? De manière générale, **tout résultat contenant une variable doit être précédé du quantificateur adéquat.**

Erreurs classiques à ne pas commettre

- Placer n'importe où des quantificateurs. Par exemple, la phrase $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ n'est pas vraiment correcte car dans cette phrase, la première fois que l'on parle de x ($f(x) \neq 0$), on ne sait pas ce que x représente et on doit attendre encore le $\forall x \in \mathbb{R}$ pour savoir qu'il s'agit d'un réel ou encore, la première fois que l'on parle de x, x n'est pas défini. La bonne phrase est $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$ et se lit de manière naturelle : pour tout réel x, f(x) est différent de 0. Une phrase du genre « $\forall$ point $M \in$ au plan, . . . » n'est pas correcte non plus, car elle mélange deux langages. On doit l'écrire ou bien « $\forall M \in \mathcal{P}$ », ou bien « pour tout point M du plan ».

Erreurs classiques à ne pas commettre

- Penser que les phrases $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} / m > n$ et $\exists m \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, m > n$ signifient la même chose et donc, ne prêter aucune attention à l'ordre des quantificateurs.
- Penser que les phrases $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0)$ et $((\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)$ signifient la même chose. Encore une fois, on ne peut pas distribuer $\forall$ sur ou.