Graphes non orientés

L2 Informatique
UFR S.A.T

Pr. Ousmane THIARE

othiare@ugb.edu.sn
[www.ousmanethiare.com]

16 avril 2020

Graphes non orientés

La notion de graphe généralise amplement la notion de relation sur un ensemble ; elle s'intéresse à la façon dont sont liés les objets. Avec les plans de métro, les cartes routières, les schémas de circuits électriques, les formules des molécules, les organigrammes, les arbres généalogiques, on utilise chaque jour des graphes...

Un graphe non orienté G = (S, A) est défini par l'ensemble fini $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$ dont les éléments sont appelés sommets, et par l'ensemble fini $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ dont les éléments sont appelés arêtes.

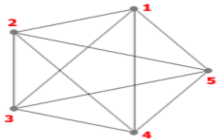
Une arête a de l'ensemble A est définie par une paire non-ordonnée de sommets, appelés les extrémités de a. Si les extrémités coïncident, on parle de boucle.

Si l'arête a relie les sommets s_i et s_j, on dira que ces sommets sont adjacents, ou incidents avec a, ou encore que l'arête a est incidente avec les sommets s_i et s_j. On notera qu'un graphe a au moins un sommet ; on notera par la suite ordre d'un graphe son nombre de sommets.

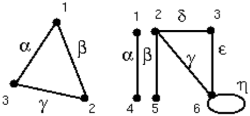
Remarques. Dans le présent chapitre, et ses proches successeurs, graphe signifie graphe non orienté (même quand cela n'est pas spécifié). Il existe aussi des graphes orientés ; ils seront étudiés plus loin.

Remarques. La définition précédente n'interdit pas la possibilité que deux mêmes sommets soient reliés par deux arêtes différentes.

Les graphes non orientés admettent une représentation graphique permettant leur visualisation :



Signalons aussi dès à présent la possibilité de pondérer les arêtes d'un graphe non orienté (la définition de graphe est alors à adapter) :



Définition

On appelle degré d'un sommet s, noté d(s), le nombre d'arêtes dont le sommet s est une extrémité (les boucles comptent pour deux).

Propriété

La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes.
Cette propriété est appélée ***Lemme des poignées de mains****.*

Définition

Le degré d'un graphe est le degré maximum de tous ses sommets.

Exercice

Calculez les degrés des sommets, et le degré des graphes ci-dessus.

Définition

Un graphe dont tous les sommets ont le même degré est dit régulier. Si le degré commun est k, alors on dit que le graphe est k-régulier.

Exercice

Les graphes précédent sont-ils réguliers ?

Exercice

Représentez un graphe 3-régulier.

Définition

Une chaîne dans G, est une suite de la forme $(s_0, a_1, s_1, a_2, \cdots, s_{k-1}, a_k, s_k)$

- *ayant pour éléments alternativement des sommets (si) et des arêtes (ai) ;*
- *commençant et se terminant par un sommet ;*
- *et telle que les extrémités de* a_i *soient* s_{i-1} *et* $s_i, i = 1, \cdots, k$.

s_0 *est appelé le départ de la chaîne et* s_k *l'arrivée.*

Remarque. On a choisi ici de réserver le terme de chemin aux graphes orientés.

Définition

Dans un graphe (orienté ou non), on dit que le sommet s' est accessible à partir du sommet s s'il existe une chaîne menant de s à s'.

Remarque. On dit aussi qu'on peut atteindre s' à partir de s.

Définition

Une chaîne dans laquelle tous les sommets sont différents s'appelle une chaîne élémentaire .

Remarque. On parle aussi de chaîne simple.
Remarque. Une chaîne simple a forcément toutes ses arêtes différentes, et ne contient évidemment pas de boucle.

Propriété

Étant donné une chaîne qui joint s et s' (différents), on peut toujours lui enlever arêtes et sommets pour obtenir une chaîne élémentaire joignant s à s'.

Exercice

Réfléchir à la preuve de cette existence.

Définition

Une chaîne de longueur n dont le départ et l'arrivée coïncident s'appelle un circuit de longueur n.

Exemple. Une boucle est un circuit de longueur 1.

Définition

Un circuit dont tous les sommets et toutes les arêtes sont différentes, s'appelle un cycle.

Exercice

Représentez un graphe qui admet :

- *un circuit,*
- *un cycle.*

Définition

Un graphe est dit simple, s'il ne contient pas de boucles et s'il n'y a pas plus d'une arête reliant deux mêmes sommets.

Exercice

Représentez un graphe simple (resp. qui n'est pas simple).

Exercice

On s'intéresse aux graphes 3-réguliers simples.

- *Essayez de construire de tels graphes ayant 4 sommets, 5 sommets, 6 sommets, et 7 sommets.*
- *Qu'en déduisez-vous ?*

Réponse. D'après le lemme des poignées de mains, la somme des degrés des sommets est égale au double du nombre d'arêtes. Si chaque sommet est de degré 3, la somme des degrés des sommets est :

- paire, si le nombre de sommets est pair,
- impaire, sinon.

Comme cette somme doit être égale à un nombre pair (le double du nombre d'arêtes), seuls les graphes 3-réguliers ayant 4, ou 6 sommets, sont possibles.

Exercice

Montrez qu'un graphe simple a un nombre pair de sommets de degré impair.

Réponse. D'après le lemme des poignées de mains, la somme S des degrés des sommets est égale au double du nombre d'arêtes, donc cette somme est paire. D'autres part, S est égale à la somme :

- des degrés pairs,
- des degrés impairs

La somme des degrés pairs est paire. Étudions la somme S' des degrés impairs : notons i_0 le nombre de sommets de degrés impairs. Cette somme S' est égale à $\sum_{k=1}^{i_0}(2k_i + 1)$, puisque chaque degré est ici impairs. Donc $S' = 2(\sum_{k=1}^{i_0} k_i)$,soit S' est égale à un nombre pair plus i_0. Quand on met tout bout) bout, on obtient finalement l'équation en parité : pair+pair+i_0=pair, soit i_0 est pair.

Exercice

Est-il possible de relier 15 ordinateurs de sorte que chaque appareil soit relié avec exactement trois autres ?

Réponse. Non, application directe de l'exercice précédent.

Exercice

Un groupe de 15 fans d'un chanteur célèbre, possède les deux particularités suivantes :

- *Chaque personne connaît au moins 7 autres*
- *Toute information détenue par une personne est répercutée dans la minute qui suit à ses connaissances (et uniquement à elles)*

Quel est le temps maximal entre le moment où une des 15 fans apprend une chose nouvelle sur leur idole, et celui où le groupe entier est au courant ?

Réponse. L'émétteur de l'information est un sommet relié à au moins 7 autres. Notons I l'ensemble de ces sommets. Il reste au plus 7 sommets (15-(7+1)). Notons J cet ensemble. Chacun des sommets de J est nécessairement relié à un des sommets de I, sinon il ne serait relié qu'à 6 sommets. L'information met donc au plus 2 mins.

Définition

Si on arrive à dessiner le graphe sans qu'aucune arête n'en coupe une autre (les arêtes ne sont pas forcément rectilignes), on dit que le graphe est planaire.

Exercice

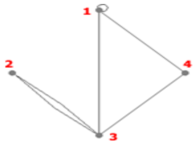
Représentez un graphe planaire.

Exercice

Représentez un graphe non planaire.

En général, dans ce cours, les graphes étudiés sont simples. On a cependant vu qu'il pouvait, pour un graphe quelconque, exister des boucles, voire des arêtes multiples : on parle, dans ce cas, de *multigraphe*.

Exemple. Un exemple de multigraphe :



$S = \{1, 2, 3, 4\}$
$A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 3), (3, 4)\}$

Définition

Un graphe est connexe s'il est possible, à partir de n'importe quel sommet, d'atteindre n'importe quel autre sommet du graphe (si, pour tout couple de sommets (s, s'), il existe une chaîne reliant s à s').

Remarque. C'est en particulier le cas lorsqu'à partir d'un sommet on peut atteindre tous les autres sommets.

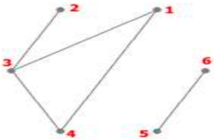
Exercice

Représenter un graphe (non orienté) connexe, et un graphe non connexe.

Définition

Un graphe non connexe se décompose en composantes connexes.

Exemple. Exemple d'un graphe n'étant pas connexe



$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$A = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (3, 4), (5, 6)\}$
Ici, les composantes connexes sont $\{1, 2, 3, 4\}$ et $\{5, 6\}$.

Définition

Un graphe est complet si chaque sommet du graphe est relié directement à tous les autres sommets.

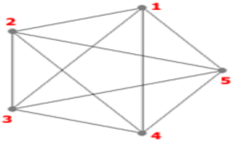
Définition

On note K_n tout graphe non orienté simple d'ordre n, tel que toute paire de sommets est reliée par une unique arête.

Propriété

$\forall n, K_n$ *est complet.*

Exemple. Graphe complet K_5



$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$A =$
$\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,$

Exemple. Combien d'arêtes possède le graphe K_n ?

Réponse. Chacun des n sommets possède n-1 arêtes, et chaque arête est ainsi comptée deux fois... $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Exercice

Un tournoi d'échecs oppose 6 personnes. Chaque joueur doit affronter tous les autres.

- *1. Construisez un graphe représentant toutes les parties possibles.*
- *2. Quel type de graphe obtenez-vous ?*
- *3. Si l'on ne joue qu'un match par jour, combien de jours faudra-t-il pour terminer le tournoi ?*
- *4. Aidez-vous du graphe pour répondre aux problèmes suivants :*
  - *Si chaque joueur ne joue qu'un match par jour, combien de jours faudra-t-il pour terminer le tournoi ?*
  - *Proposer un calendrier des matches.*

Définition

Un graphe est biparti si ses sommets peuvent être divisés en deux ensembles X et Y, de sorte que toutes les arêtes du graphe relient un sommet dans X à un sommet dans Y.

On peut se rendre compte que les graphes biparti sont les graphes que l'on peut colorier avec au plus deux couleurs, de sorte que deux sommets adjacents ne possèdent jamais la même couleur. En d'autres termes, les graphes bipartis sont les graphes dont le nombre chromatique est inférieur ou égal à 2 (ce terme sera défini plus proprement dans la suite du cours).

Exercice

Responsable d'organiser des speed datings, on souhaite placer les différents individus inscrits à une soirée donnée, dans différentes salles, de telles sorte que nul ne se connaît dans une salle donnée.

- *1. Donner un exemple où cela n'est pas possible.*
- *2. Comment modéliser ce problème à l'aide d'un graphe ?*
- *3. Peut-on n'utiliser que deux salles, s'il est possible de placer 3 individus autour d'une table de telle sorte que chaque individu connaît ses trois voisins ? Que se passe-t-il si on remplace 3 par 5, par 7 ?*

Le résultat suivant se déduit assez aisément...

Propriété

Un graphe est biparti si et seulement il ne contient pas de cycle impair.

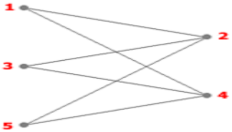
Exercice

Relier les notions de graphe biparti et de relation binaire.

Définition

Un graphe biparti est dit biparti complet (ou encore est appelé une biclique) si chaque sommet de U est relié à chaque sommet de V.

Exemple Exemple d'un graphe biparti complet :



$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$A = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (2, 5), (3, 4), (4, 5)\}$
Avec les notations de la définition, on a $U = \{1, 3, 5\}$ et $V = \{2, 4\}$, ou vice versa.
Un tel graphe se note $K_{3,2}$. Plus généralement,
NOTATION : On note $K_{m,n}$ un graphe biparti complet liant m sommets à n sommets.

Propriété

Ces graphes $K_{m,n}$ possèdent mn arêtes.

Exercice

Sur un échiquier 3x3, les deux cavaliers noirs sont placés sur les cases a_1 et c_1, les deux cavaliers blancs occupant les cases a_3 et c_3. Aidez-vous d'un graphe pour déterminer les mouvements qui permettront aux cavaliers blancs de prendre les places des cavaliers noirs, et vice versa.

Réponse. Faire un graphe biparti :

- a_1, a_3, c_1, c_3 d'un côté,
- a_2, b_1, b_2, b_3, c_2 de l'autre.

avec des arêtes quand le passage d'une case à l'autre est possible pour un cavalier (par exemple, entre a_1 et b_3). On oriente alors les arêtes, suivant les parcours à réaliser par les cavaliers. De a_1, on peut envoyer le cavalier en b_3 ou c_2. Mais si on l'envoie en c_2, il se retrouve le coup d'après en a_3.

Exercice

Quel est le nombre maximal d'arêtes dans un graphe non orienté d'ordre n qui ne possède pas d'arêtes parallèles ? Et si l'on suppose qu'il ne possède pas de boucle ?

Réponse. Le cas le pire correspond au graphe complet K_n, et on a déjà calculé son nombre d'arêtes : $(n-1)+\cdots+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$. Rajouter des boucles revient, dans le cas le pire, à rajouter une arête sur chaqu'un des n sommets. On ajoute donc n à ce qui précède, pour trouver $\dfrac{n(n-1)}{2}$

Présentation. La *matrice d'incidence* d'un graphe non orienté est une matrice J à coefficients entiers dont les lignes sont repérées par les sommets d'un graphe et les colonnes par ses arêtes :

Définition

Par définition, $J_{s,\epsilon}$ vaut :

- *1 quand s est une extrémité de l'arête ϵ si celle-ci n'est pas une boucle,*
- *2 quand s est une extrémité de la boucle ϵ,*
- *0 si s n'est pas une extrémité de ϵ.*

On peut reconstituer un graphe non orienté à partir de sa matrice d'incidence, car elle donne le nombre de sommets, le nombre d'arêtes et elle dit comment chaque arête est liée à chaque sommet.

Introduction

Définitions et premiers exemples

Quelques types particuliers de graphes

Représentation des graphes

Exercice

Représentez le graphe non orienté dont la matrice d'incidence est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice

Représentez les matrices d'incidences des graphes de ce chapitre.

Exercice

Réfléchir aux avantages et inconvénients d'un tel mode de représentation des graphes.

Propriété

Si $s_1, \cdots, s_n$ sont les sommets d'un graphe non orienté, alors :

$$\begin{pmatrix} d(s_1) \\ d(s_2) \\ \vdots \\ d(s_n) \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice

Trouvez pourquoi.

Présentation. On peut représenter un graphe non orienté par une matrice d'adjacence.

Définition

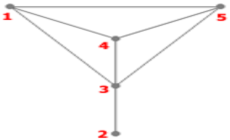
Dans une matrice d'adjacence, les lignes et les colonnes représentent les sommets du graphe.

- *Un 1 à la position (i,j) signifie que le sommet i est adjacent au sommet j.*
- *Sinon, on place un 0.*

En cas de boucle (pour le sommet i, par exemple), on place un 1 sur la diagonale (en position (i, i)).

Remarque. On aurait pu convenir de placer un 2 en cas de boucle. L'avantage serait de continuer à obtenir le degré des sommets en faisant les sommes par lignes. Par contre, on perdrait la possibilités, évoquée ci-dessous, de déterminer les chemins de longueur k.

Exemple. Considérons le graphe G :

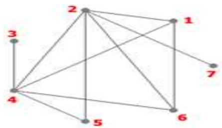


Voici la matrice d'adjacences du graphe G :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice

Décrivez le graphe G ci-dessous par une matrice d'adjacences.



Exercice

Représentez les matrices d'adjacences des graphes de ce chapitre.

Cette matrice a plusieurs caractéristiques :

- 1. Elle est carrée : il y a autant de lignes que de colonnes ;
- 2. Un 1 sur la diagonale indique une boucle. Si le graphe n'a pas de boucle, alors la diagonale de sa matrice d'adjacence est nulle ;
- 3. La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique : $m_{ij} = m_{ji}$.

Exercice

Calculez M^2 et M^3 pour la matrice d'adjacence M ci-dessus. Comparer ces matrices aux chaînes de longueur 2 et 3 reliant deux sommets quelconques.

Propriété

Soit A la matrice d'adjacence d'un graphe G. Le coefficient (s,t) de A_k est le nombre de chaînes de longueur k qui mènent du sommet s au sommet t.

Exercice

Démontrez ce résultat, par récurrence.

Exercice

On pose

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- *1. Dessinez le graphe non orienté ayant J pour matrice d'incidence.*
- *2. Déterminez sa matrice d'adjacence B.*
- *3. Vérifiez les formules précédentes :*
  - *le lien entre matrice d'incidence et degré des sommets,*
  - *le lien entre B^k et les chaînes de longueur k.*

Exercice

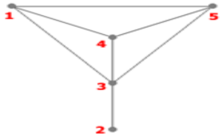
Quels sont les avantages et les inconvénients de cette méthode de représentation des graphes ? Comparez-la aux matrices d'incidences.
En particulier, pour un graphe à m sommets et n arêtes, quelle représentation est la plus gourmande en espace mémoire ? Cela dépend du nombres d'arêtes ?

Présentation.

Définition

On peut encore représenter un graphe en donnant pour chacun de ses sommets la liste des sommets auxquels il est adjacent. On parle alors de liste d'adjacence.

Exemple. On considère le graphe G suivant :



Voici les listes d'adjacences de G :

1 : 3, 4, 5

2 :3

3 : 1, 2, 4, 5 4 : 1, 3, 5

5 : 1, 3, 4

Exercice

Représentez les listes d'adjacence des graphes de ce chapitre.

Exercice

Discuter des avantages et des inconvénients de cette méthode de représentation. On la comparera aux matrices d'adjacence et d'incidence.