Introduction à la théorie des ensembles

L2 Informatique - UFR S.A.T

Pr. Ousmane THIARE

ousmane.thiare@ugb.edu.sn
http://www.ousmanethiare.com

28 octobre 2014

Introduction à la théorie des ensembles

Notion première d'ensemble

Ensemble Notion première qui ne se définit pas. C'est une collection d'objets réunis en vertu d'une propriété commune.

On peut définir un ensemble de deux manières :

- en extension : on donne la liste exhaustive des éléments qui y figurent,

Notion première d'ensemble
Ensemble Notion première qui ne se définit pas. C'est une collection d'objets réunis en vertu d'une propriété commune.
On peut définir un ensemble de deux manières :

- en extension : on donne la liste exhaustive des éléments qui y figurent,
- en compréhension : en donnant la propriété que doivent posséder les éléments de l'ensemble.

Notion première d'ensemble

Exercice 1.1 Définir les ensembles suivants en compréhension :

1. $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$
2. $B = \{1, 2, 7, 14\}$
3. $C=\{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\}$

Réponse : 1) Les puissances de 2 inférieures ou égales à 64. 2) Les diviseurs de 14. 3) Les entiers inférieurs ou égaux à 20 qui ont au moins 3 diviseurs (les nombres non premiers entre 2 et 20).

Notation : On note $\mathbb{N}_n$ l'ensemble des entiers inférieurs ou égaux à n.

Notion première d'ensemble

Exercice 1.2 Définir les ensembles suivants en extension

1. A = $\{x \in \mathbb{R} | x(x+5) = 14\}$
2. B = $\{x \in \mathbb{N} | x(2x+3) = 14\}$
3. C=$\{x \in \mathbb{N}_n^* | x^4 - 1 \textit{est divisible par } 5\}$

Réponse : $A = \{2, -7\}$, $B = \{2\}$, et $C = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ (factoriser $x^4 - 1$).

Règles de fonctionnement

Relation d'appartenance. On admet être capable de décider si un objet est ou non élément d'un ensemble. Le fait que l'élément x appartienne à l'ensemble X se note : $x \in X$.

Objets distincts. On admet aussi être capable de distinguer entre eux les éléments d'un ensemble. En particulier, un ensemble ne peut pas contenir deux fois le même objet.

Ensemble vide. Il existe un ensemble ne contenant aucun élément, appelé ensemble vide. Symbole : le cercle barré $\emptyset$.

Règles de fonctionnement

L'ensemble vide ne correspond pas à rien ; c'est en fait un ensemble qui ne contient rien, mais en tant qu'ensemble il n'est pas rien : un sac vide est vide, mais le sac en lui même existe.

La notation $\{\emptyset\}$ n'a pas le même sens que $\emptyset$. La dernière notation décrit un ensemble qui ne contient rien alors que le premier décrit un ensemble contenant un élément : l'ensemble vide. On peut, afin de mieux comprendre, reprendre l'analogie du sac vide. Un tiroir contenant un sac vide - $\{\emptyset\}$ - n'est pas vide - $\emptyset$ - et contient bien un objet.

D'ailleurs, l'ensemble $\{\emptyset\}$ contient un élément (qui est un ensemble), quand l'ensemble $\emptyset$ n'en contient aucun...

Rappels de théorie des ensembles
Opérations sur les ensembles

Dernière règle de fonctionnement des ensembles

Un ensemble ne peut pas s'appartenir à lui-même.

Cette dernière règle de fonctionnement peut sembler obscure, pas naturelle.

Dans l'euphorie de la naissance de la théorie des ensembles, les mathématiciens ne voyaient pas d'objection à envisager un ensemble Ω dont les éléments seraient tous les ensembles (en particulier, $\Omega \in \Omega$) : l'ensemble des ensembles, à l'origine de tout !

Leur enthousiasme fut stoppé lorsque Russell leur opposa le paradoxe...

Dernière règle de fonctionnement des ensembles

Exercice 1.3 (Paradoxe de Bertrand Russell (1872-1970)).
Soit X l'ensemble de tous les éléments qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes.
A-t-on $X \in X$? A-t-on $X \notin X$?
REMARQUE 1.1. Dit autrement : le barbier qui rase tous les barbiers qui ne se rasent pas eux-mêmes...se rase-t-il lui-même ?
REMARQUE 1.2. On en déduit donc que l'on ne peut pas parler de l'ensemble de tous les ensembles (cet ensemble devrait s'appartenir lui-même). Il ne faut pas négliger l'impact d'une telle révélation.

Rappels de théorie des ensembles

Opérations sur les ensembles

Sous-ensembles, ensemble des parties

Sous-ensemble Les sous-ensembles sont définis par la relation d'inclusion...

Définition

A est un sous-ensemble de B ($A \subset B$) si et seulement si tout élément de A appartient à B. On dit aussi que A est une partie de B.

Proposition

L'ensemble vide est inclus dans n'importe quel ensemble.

Sous-ensembles, ensemble des parties

Preuve

D' après la définition d' un sous-ensemble, cela veut dire que pour tout élément x de $\emptyset$, x appartient à A.
Raisonnons a contrario : si l'ensemble vide n'est pas inclus dans A, alors il existe au moins un élément de l'ensemble vide qui n'appartient pas à A. Or, il n'y a aucun élément dans l'ensemble vide, donc plus particulièrement aucun élément de l'ensemble vide qui n'appartienne pas à A. On en conclut donc que tout élément de $\emptyset$ appartient à A, et donc que $\emptyset$ est un sous-ensemble de A.

Sous-ensembles, ensemble des parties

Plus généralement, toute proposition commençant par "pour tout élément de $\emptyset$" est vraie. On a de plus le résultat suivant :

Propriété

Tout ensemble est inclus dans lui-même.

Ensemble des parties

Définition

Soit A un ensemble. L'ensemble des parties de A, noté $\mathcal{P}(A)$, est l'ensemble de tous les sous-ensembles de A.

On sait déjà que $\emptyset$ et A sont deux parties de A...

Propriété

Pour tout ensemble A, on a $\emptyset$, $A \in \mathcal{P}(A)$.

Exemple 1.4 Si A $=\{1, 2, 3\}$, alors
$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

Ensemble des parties

Exemple 1.5 Si A $=\emptyset$, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}, \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Cela n'est pas qu'un jeu de l'esprit :

- On définit 0 comme étant $\emptyset$,
- 1 correspond alors à $\mathcal{P}(\emptyset)$,
- 2 est alors $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$,
- etc.

D'autres définitions de l'ensemble des entiers naturels existent.

De manière plus générale, si A possède n éléments, $\mathcal{P}(A)$ en possède 2^n.

Rappels de théorie des ensembles
Opérations sur les ensembles

Ensemble des parties

Exercice 1.6 Justifier le fait que le nombre d'éléments de $\mathcal{P}(A)$ est égal à 2^n, où n représente le nombre d'éléments de A.

Exercice 1.7 On considère A $=\{1, 2\}$. Dire quelles assertions sont exactes :

- $1 \in A$,
- $1 \subset A$,
- $\{1\} \in A$,
- $\{1\} \subset A$,
- $\emptyset \in A$,
- $\emptyset \subset A$.

Exemple 1.8 Reprendre l'exercice précédent, avec A $=\{\{1\}, \{2\}\}$.

Rappels de théorie des ensembles
Opérations sur les ensembles

Représentation graphique
On peut représenter ensembles et sous-ensembles à l'aide d'un diagramme de Venn...
Exercice 1.9 A partir des affirmations

1. les poètes sont des gens heureux,
2. tous les docteurs sont riches et
3. nul être heureux n'est riche,

déterminer la validité de chacune des conclusions suivantes

1. Aucun poète n'est riche.
2. Les docteurs sont des gens heureux.
3. Nul ne peut être à la fois docteur et poète.

Représentation graphique

Exercice 1.10 Est-ce que $\{a\} \in \{a, b, c\}$? Former la liste des parties de $\{a, b, c\}$.

Exercice 1.11 Montrer que $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$ quand $A \subset B$.

Exercice 1.12 Soit $\mathbb{B} = \{0, 1\}$.

1. A-t-on $\mathbb{B} \in \mathbb{B}$?
2. Quels sont les éléments de $\mathbb{B}$?
3. Quels sont les éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{B}))$?

Egalité de deux ensembles

Définition

Deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments.

$A \subset B$ et $B \subset A \Longleftrightarrow A = B$.

Exercice 1.13 Dans chacun des cas suivants, déterminer si les ensembles sont égaux :

1. A=$\{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ et B=$\{x \in \mathbb{R} | \geq |x|\}$
2. A=$\{x\ \mathbb{R} | x > 0\}$ et B=$\{x \in \mathbb{R} | x \leq |x|\}$
3. A=$\mathbb{Z}$ et B=$\{x \in \mathbb{Z} | x^2 - x \ pair\}$
4. A=$\{x \in \mathbb{N}_{10} | x \ impair, non \ divisible \ par \ 3\}$ et B=$\{x \in \mathbb{N}_{10} | 24 \ divise \ x^2 - 1\}$

Réponse : Pour le 3, $x^2 - x = x(x - 1)$, et réfléchir sur la parité de ce produit.

Rappels de théorie des ensembles

Opérations sur les ensembles

Réunion, intersection

Réunion A et B sont deux ensembles, on considère la réunion de A et de B, notée $A \cup B$, l'ensemble des éléments qui sont éléments de A ou de B.

Exemple 1.14 A=$\{1, 2, 3\}$, B=$\{1, 4, 5\}$, alors $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Exercice 1.15 Faire la réunion des ensembles A=$\{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 3\}$, B=$\{x \in \mathbb{R} | -2 < x \leq 1\}$.

Rappels de théorie des ensembles

Opérations sur les ensembles

Réunion, intersection

Propriété

La réunion de deux ensembles possède certaines propriétés :

- *idempotence :* $A \cup A = A$

Exercice 1.16. Donner des exemples d'opérateurs idempotents, commutatifs, associatifs, et possédant un élément neutre, par exemple en arithmétique, ou en analyse.

Rappels de théorie des ensembles

Opérations sur les ensembles

Réunion, intersection

Propriété

La réunion de deux ensembles possède certaines propriétés :

- *idempotence :* $A \cup A = A$
- *commutativité :* $A \cup B = B \cup A$

Exercice 1.16. Donner des exemples d'opérateurs idempotents, commutatifs, associatifs, et possédant un élément neutre, par exemple en arithmétique, ou en analyse.

Réunion, intersection

Propriété

La réunion de deux ensembles possède certaines propriétés :

- *idempotence :* $A \cup A = A$
- *commutativité :* $A \cup B = B \cup A$
- *associativité :* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Exercice 1.16. Donner des exemples d'opérateurs idempotents, commutatifs, associatifs, et possédant un élément neutre, par exemple en arithmétique, ou en analyse.

Rappels de théorie des ensembles

Opérations sur les ensembles

Réunion, intersection

Propriété

La réunion de deux ensembles possède certaines propriétés :

- *idempotence :* $A \cup A = A$
- *commutativité :* $A \cup B = B \cup A$
- *associativité :* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- *élément neutre :* $A \cup \emptyset = A$

Exercice 1.16. Donner des exemples d'opérateurs idempotents, commutatifs, associatifs, et possédant un élément neutre, par exemple en arithmétique, ou en analyse.

Intersection L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \cap B$ des éléments communs à A et à B.

Exercice 1.17. Dans chacun des cas suivants, faire l'intersection des ensembles A et B.

1. A = l'ensemble des rectangles, et B = l'ensemble des losanges.
2. A=$\{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 3\}$, B=$\{x \in \mathbb{R} | -2 < x \leq 1\}$

Propriété

L'intersection de deux ensembles possède certaines propriétés :

- *idempotence :* $A \cap A = A$

Rappels de théorie des ensembles

Opérations sur les ensembles

Intersection L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \cap B$ des éléments communs à A et à B.

Exercice 1.17. Dans chacun des cas suivants, faire l'intersection des ensembles A et B.

1. A = l'ensemble des rectangles, et B = l'ensemble des losanges.
2. A=$\{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 3\}$, B=$\{x \in \mathbb{R} | -2 < x \leq 1\}$

Propriété

L'intersection de deux ensembles possède certaines propriétés :

- *idempotence :* $A \cap A = A$
- *commutativité :* $A \cap B = B \cap A$

Rappels de théorie des ensembles
Opérations sur les ensembles

Intersection L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \cap B$ des éléments communs à A et à B.

Exercice 1.17. Dans chacun des cas suivants, faire l'intersection des ensembles A et B.

1. A = l'ensemble des rectangles, et B = l'ensemble des losanges.
2. A=$\{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 3\}$, B=$\{x \in \mathbb{R} | -2 < x \leq 1\}$

Propriété

L'intersection de deux ensembles possède certaines propriétés :

- *idempotence :* $A \cap A = A$
- *commutativité :* $A \cap B = B \cap A$
- *associativité :* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Intersection

Propriété

L'intersection de deux ensembles possède certaines propriétés :

- *élément neutre : si l'on se place dans un ensemble E et que A est une partie de E, alors E est élément neutre pour l'intersection :* $A \cap E = A$

Propriétés mutuelles de ces deux opérations Ces deux opérations ont des propriétés symétriques...

Propriété

On a les distributivités :

- *de* $\cup$ *sur* $\cap$ *:* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Exercice 1.18. On se donne trois ensembles A, B, C tels que $A \cap B \cap C = \emptyset$. Sont-ils nécessairement disjoints deux à deux ? Donner des exemples.

Propriétés mutuelles de ces deux opérations Ces deux opérations ont des propriétés symétriques...

Propriété

On a les distributivités :

- *de* $\cup$ *sur* $\cap$: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- *de* $\cap$ *sur* $\cup$: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Exercice 1.18. On se donne trois ensembles A, B, C tels que $A \cap B \cap C = \emptyset$. Sont-ils nécessairement disjoints deux à deux ? Donner des exemples.

Rappels de théorie des ensembles

Opérations sur les ensembles

Définition

Pour $A \subset E$, on définit le complémentaire de A par rapport à E comme l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas éléments de A.

NOTATION : Il existe plusieurs manières de noter le complémentaire de A dans E : $E \backslash A$ (" E moins A "), $\bar{A}$, ou encore $\mathcal{C}_E^A$.
REMARQUE : Il faut donc se placer, pour la définition de la complémentation, dans $\mathcal{P}(E)$ (où E est un ensemble fixé) : la complémentation se définit par rapport à un ensemble.

Propriété

La complémentation a plusieurs propriétés remarquables :

- *involution :* $\bar{\bar{A}} = A$,

Exercice 1.19. Connaissez-vous d'autres opérations involutives ?

Exercice 1.20. Illustrez, à l'aide d'un diagramme de Venn, les lois de De Morgan.

Exercice 1.21. Faire la réunion des ensembles A et B, quand A=$\{x \in \mathbb{N} | x impair\}$, et B=$\{x \in \mathbb{N} | x \textit{ pas divisible par } 3\}$. **Réponse :** Rechercher à quoi correspond le complémentaire de la réunion de A et B.

Rappels de théorie des ensembles

Opérations sur les ensembles

Propriété

La complémentation a plusieurs propriétés remarquables :

- *involution :* $\bar{\bar{A}} = A$,
- *loi de De Morgan :* $A\bar{\cup}B = \bar{A} \cap \bar{B}$, *et* $A\bar{\cap}B = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exercice 1.19. Connaissez-vous d'autres opérations involutives ?
Exercice 1.20. Illustrez, à l'aide d'un diagramme de Venn, les lois de De Morgan.
Exercice 1.21. Faire la réunion des ensembles A et B, quand A=$\{x \in \mathbb{N} | ximpair\}$, et B=$\{x \in \mathbb{N} | x \textit{ pas divisible par } 3\}$. **Réponse :** Rechercher à quoi correspond le complémentaire de la réunion de A et B.

Le produit cartésien des ensembles A et B (dans cet ordre) est l'ensemble, que l'on note $A \times B$ (" A croix B ") des couples ordonnés (a, b) où $a \in A$ et $b \in B$.
Dans le couple (a, b),

- (a, b) n'est pas un ensemble et
- (a,b) est distinct de (b,a).

Exercice 1.22. Représenter graphiquement la réunion des ensembles A=$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y \leq 2\}$, et B=$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 2 < 3x - y\}$.
Exercice 1.23. Représenter graphiquement l'intersection des ensembles A=$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y \leq 2\}$, et B=$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 2 < 3x - y\}$.

Rappels de théorie des ensembles

Opérations sur les ensembles

Définition

Pour deux ensembles A et B, on appelle différence symétrique, note $A\Delta B$, l'ensemble défini par :

$$A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$$

c'est-à-dire que $A\Delta B$ est constitué des éléments qui appartiennent soit à A, soit à B, mais pas aux deux.

Exercice 1.27. Soit A=$\{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{1,3,5,7,9\}$, $C = \{4,5,6,7,8,9\}$ et D=$\{2,3,5,7,8\}$.
Trouver $A\Delta B$, $C\Delta B$, $A \cap (B\Delta D)$, $B\Delta C$, $A\Delta D$ et $(A \cap B)\Delta(A \cap D)$.