Relations binaires entre ensembles

L2 Informatique - UFR S.A.T

Pr. Ousmane THIARE

othiare@ugb.edu.sn
[www.ousmanethiare.com]

16 avril 2020

Relations binaires entre ensembles

On se donne deux ensembles E et F .

Définition

On dit que :

- *l'on a défini une relation binaire* $\mathcal{R}$ *entre ces deux ensembles lorsque l'on s'est donné une partie G de l'ensemble produit* $E \times F$ $(G \subset E \times F)$.
- *Cette partie est appelée graphe de la relation binaire.*
- *Si x dans E et y dans F sont tels que* $(x, y) \in G$, *on dit que x est en relation avec y par la relation* $\mathcal{R}$ *et on note* $x\mathcal{R}y$

Remarque : Lorsque E=F, on parle de relation binaire définie dans l'ensemble E. Son graphe est une partie de E^2.

Dans ce paragraphe, on se place dans le cas où E=F. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie dans un ensemble E, de graphe G. **Réflexivité, antisymétrie, transitivité**

Définition

$\mathcal{R}$ est dite réflexive quand tout élément de E est en relation avec lui-même : $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$.

Définition

$\mathcal{R}$ est dite antisymétrique si, lorsque x est en relation avec y, alors y ne peut pas être en relation avec x (sauf si x=y) : $\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$

Dans ce paragraphe, on se place dans le cas où E=F. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie dans un ensemble E, de graphe G. **Réflexivité, antisymétrie, transitivité**

Définition

$\mathcal{R}$ est dite transitive lorsque, si x est en relation avec y, et si y l'est avec z, alors x est en relation avec z :
$\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}\, z \Rightarrow x\mathcal{R}\, z.$

Définition

$\mathcal{R}$ est une relation d'ordre lorsqu'elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Exemple : Quelques relations d'ordre :

- $(\mathbb{R}, \leq)$
- $(\mathcal{P}(E), \subset)$

Exemple : On note a|b si et seulement si b est un multiple de a ($\exists k \in \mathbb{N}^*, b = ka$). C'est une relation d'ordre définie dans $\mathbb{N}^*$. En effet, elle est :

- **reflexive :** a=1a, donc a|a est vrai,
- **antisymétrique :** si a|b et b|a, alors $\exists k, k' \in \mathbb{N}^*$, b=ka et a=k'b. Donc a = kk'a. Comme $a \neq 0$, kk'=1. Mais $k, k' \in \mathbb{N}^*$, donc k=k'=1, et a=b.
- **transitive :** si a|b et b|c, alors $\exists k, k' \in \mathbb{N}^*$, b=ka et c=k'b. Donc c=kk'a : $\exists k'' \in \mathbb{N}^*$ (k"=kk') tel que c=k"a : a|c.

La structure algébrique constituée par l'ensemble E, muni de la relation d'ordre $\mathcal{R}$, (c'est-à-dire : le couple (E, $\mathcal{R}$)) est celle d'ensemble ordonné.

Une relation d'ordre définie dans un ensemble E peut posséder une propriété supplémentaire, celle selon laquelle tous les éléments de E sont comparables entre eux. On formalise comme suit :

Définition

Une relation d'ordre qui possède cette dernière propriété est dite relation d' ordre total, et la structure algébrique correspondante est celle d' ensemble totalement ordonné.

Remarque : Cette propriété est aussi équivalente à :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x$$

ou encore : « si x n'est pas en relation avec y, alors y est en relation avec x ».

Définition

Dans le cas contraire, il existe des éléments qui ne sont pas comparables : on parle alors d' ordre partiel.

Exemple : $\leq$ est une relation d'ordre totale dans R.

Soit (E, $\mathcal{R}$) un ensemble ordonné et A une partie de E.
Quelques définitions. . .

Définition

On appelle majorant de A tout élément M de E tel que, quel que soit $a \in A, a\mathcal{R}M$.

Définition

La partie A de E est dite majorée s'il existe un majorant de A.

Définition

On appelle minorant de A tout élément m de E tel que, quel que soit $a \in A, m\mathcal{R}a$.
On parle aussi de partie minorée.

Définition

On appelle élément maximum de A un élément de A qui est majorant de A.

Remarque : Si A est non majorée, il est exclu qu'elle admette un élément maximum. Cet élément maximum n'existe pas toujours, même pour une partie majorée. Ainsi, l'intervalle réel]2,3[est majoré, mais n'a pas d'élément maximum. Cependant, s'il existe, cet élément est unique.

Définition

On appelle élément minimum de A un élément de A qui est minorant de A.

On se place encore dans ce paragraphe dans le cas où E=F . Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie dans un ensemble (non vide) E, de graphe G.

Définition

R est dite symétrique si, dès que x est en relation avec y, alors y est en relation avec x

$$\forall x \in E, \forall y \in E, (x, y) \in G \Rightarrow (y, x) \in G$$

Remarque : Ou encore : $\forall x \in E, \forall y \in E, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.

Définition

$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence lorsqu'elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exemple : L'égalité est une relation d'équivalence.

Exemple : Par définition :
$x \equiv y[n](\mathit{lire} : "\ x\ \mathit{est\ congru\ \ y\ modulo\ n}") \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x - y = k.n$

- réflexivité : $x \equiv$ x [n] : en effet, x-x=0.n, et 0 $\in \mathbb{Z}$.
- symétrie : si x$\equiv y[n], \exists k \in \mathbb{Z}$, x-y=k·n ; alors y-x=(-k)·n ; or, si $k \in \mathbb{Z}, (-k) \in \mathbb{Z}$, donc y$\equiv$x [n].
- transitivité : si $x \equiv y$ [n] et $y \equiv z$ [n], $\exists k \in \mathbb{Z}$, x-y=k·n et $\exists l \in \mathbb{Z}, y - z = l.n$. En aditionnant membre à membre ces deux égalités, on obtient x-z=(k + l)·n, or $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$, donc $k + l \in \mathbb{Z}$, donc $x \equiv z[n]$.

C'est bien une relation d'équivalence.

Définition

Soit x un élément de E, et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. On appelle classe d'équivalence de cet élément l'ensemble des éléments de E qui sont en relation avec x (on dit encore : "qui sont équivalents à x").

Notation : On note $\dot{x}$ la classe de l'élément x :
$\dot{x} = \{y \in E | y\mathcal{R}x\}$.

Propriété

L'intersection de deux classes d'équivalence distinctes est vide.

Remarque : On dit aussi que les classes sont deux à deux disjointes.

Preuve : On considère deux classes, $\dot{x}$ et $\dot{y}$, soit $z \in \dot{x} \cap \dot{y}; \forall t \in \dot{x}$, on a $(t, x) \in G$; mais $z \in \dot{x}$, donc $(z, x) \in G$, donc (symétrie) $(x, z) \in G$, donc (transitivité) $(t, z) \in G$; mais $z \in \dot{y}$, donc $(z, y) \in G$, donc (transitivité) $(t, y) \in G$, donc (finalement) $t \in \dot{y}$, et donc $\dot{x} \subset \dot{y}$; raisonnement analogue pour tout $t \in \dot{y}$, qui aboutit à $\dot{y} \subset \dot{x}$, et enfin (par double inclusion) $\dot{x} = \dot{y}$; si deux classes ont un élément commun, elles sont confondues ; donc deux classes distinctes sont disjointes).

Définition

Une partition d'un ensemble E est une famille de sous-ensembles de E, 2 à 2 disjoints, et dont la réunion est égale à E.

Propriété

Les classes d'équivalence réalisent une partition de E.

Preuve : Comme les classes sont des parties de E, leur réunion est une partie de E. Réciproquement, tout élément de E appartient à une classe ("tout élément est classé"). Donc E est une partie de la réunion des classes ; et E est égal à la réunion des classes.

Définition

Il s'agit de l'ensemble des classes d'équivalence de tous les éléments de E.

Notation : $E/\mathcal{R}$
Pour parler aisément d'une classe, on choisit un de ses éléments, et cet élément, surmonté d'un point, sert à représenter la classe en question. Une fois que ce choix est fait, il est définitif, et il n'est plus question d'évoquer les autres éléments de cette classe, il faut se tenir, sous peine d'incohérence, au choix qui a été fait.
Exemple : On choisit pour représentants les entiers < 4, donc 0, 1, 2 et 3. L'ensemble-quotient est $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}\}$.

Définition

La relation binaire (dans E) de symbole $\mathcal{R}$ est dite compatible avec l'opération (définie dans E) de symbole $\circ$ lorsque, quels que soient les éléments x, x', y et y' de E : si $x\mathcal{R}x'$ et si $y\mathcal{R}y'$, alors $(x \circ y)\mathcal{R}(x' \circ y')$

Autrement dit, l'opération conserve la relation.

Exemple : On considère la relation classique d'inégalité dans $\mathbb{R}$: si on a $x \leq x'$ et $y \leq y'$?, on peut écrire $x + y \leq x' + y'$.

Ce résultat est bien connu : on a le droit "d'additionner des inégalités membre à membre". En d'autres termes, l'addition des réels est compatible avec l'inégalité.

Exemple (suite) : Mais, de $-2 \leq 1$ et de $-3 \leq -1$, on ne peut pas déduire que $6 \leq -1$... On n'a pas le droit de "multiplier des inégalités membre à membre". La multiplication des réels, quant a elle, n'est donc pas compatible avec l'inégalité.
Lorsqu'une relation d'équivalence est compatible avec une opération, on peut définir dans l'ensemble-quotient une opération, dite induite de celle qui existe dans l'ensemble d'origine.