Calcul propositionnel

L2 Informatique - UFR S.A.T

Pr. Ousmane THIARE

othiare@ugb.edu.sn
[www.ousmanethiare.com]

16 avril 2020

Calcul propositionnel

Les liens étroits entre logique et informatique ne sont pas récents, avec pour exemple la citation suivante de plus de 40 ans : "It is reasonable to hope that the relationship between computation and mathematical logic will be as fruitful in the next century as that between analysis and physics in the last. The development of this relationship demands a concern for both applications and mathematical elegance".
Ce chapitre met l'accent sur le calcul des propositions, qui est un des fondements de la logique classique, initié par Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848–1925).

Qu'est-ce donc qu'un raisonnement ? Si l'on sait que tous les écureuils sont des rongeurs, que tous les rongeurs sont des mammifères, que tous les mammifères sont des vertébrés et que tous les vertébrés sont des animaux, on peut en déduire que tous les écureuils sont des animaux.[. . .].
Ce raisonnement est simple à l'extrême, mais sa structure ne diffère pas fondamentalement de celle d'un raisonnement mathématique. Dans les deux cas, le raisonnement est formé d'une suite de propositions dans laquelle chacune découle logiquement des précédentes, [. . .]. Dans ce cas, on applique la même règle trois fois. Cette règle permet, si l'on sait déjà que tous les Y sont des X et que tous les Z sont des Y , de déduire que tous les Z sont des X.

Les propositions

Cette section formalise la notion de proposition, montre comment les propositions peuvent être connectées entre elles et comment elles sont représentées syntaxiquement. L'homme exprime son raisonnement par un discours, et ce discours utilise une langue (une langue naturelle, français, anglais,. . .). D'une manière générale, ce discours est articulé en phrases, d'un niveau de complexité variable, et c'est l'étude de ces « énoncés » que se propose de faire la logique.

Définition

Parmi tous les énoncés possibles qui peuvent être formulés dans une langue, on distingue ceux auxquels il est possible d'attribuer une « valeur de vérité » : vrai ou faux. Ces énoncés porteront le nom de propositions .

Exemple :
Ainsi, « Henri IV est mort assassiné en 1610 », « Napoléon Bonaparte a été guillotiné en 1852 » sont des propositions, puisqu'on peut leur attribuer une valeur de vérité (« vrai » pour la première, « faux » pour la seconde).
Le calcul que l'on étudie considère toujours comme acquises les vérités suivantes, élevées au rang d' axiomes :

- **Principe de non-contradiction :** Une proposition ne peut être simultanément vraie et fausse.

Exemple :
Ainsi, « Henri IV est mort assassiné en 1610 », « Napoléon Bonaparte a été guillotiné en 1852 » sont des propositions, puisqu'on peut leur attribuer une valeur de vérité (« vrai » pour la première, « faux » pour la seconde).
Le calcul que l'on étudie considère toujours comme acquises les vérités suivantes, élevées au rang d' axiomes :

- **Principe de non-contradiction :** Une proposition ne peut être simultanément vraie et fausse.
- **Principe du tiers-exclu :** Une proposition est vraie ou fausse (il n'y a pas d'autre possibilité).

Les connecteurs logiques

L'analyse logique d'une phrase (reconnue comme proposition) fait apparaître des sous-phrases qui constituent elles-mêmes des propositions. Ces « membres de phrases » sont reliés entre eux par des « connecteurs logiques », comme expliqué dans la partie suivante.

Analyse logique des propositions

Considérons l'énoncé : « J'ai obtenu une mauvaise note à cet examen parce que je n'ai pas assez travaillé ou parce que le cours est trop difficile ». On suppose qu'il est possible d'attribuer une valeur de vérité à cet énoncé « global », ce qui le classe parmi les propositions.

Introduction
Les fondements de la logique des propositions
Sémantique du calcul propositionnel

Analyse logique des propositions

On peut alors mener l'analyse logique de cette phrase, de manière à en extraire les propositions (au sens grammatical du terme) : « J'ai obtenu une mauvaise note à cet examen », « je n'ai pas assez travaillé », « le cours est trop difficile », qui sont aussi des propositions au sens logique du terme. Globalement, cet énoncé exprime que « ma mauvaise note » est conséquence de l'une (au moins) des deux causes suivantes :

- « mon manque de travail »,
- « un cours trop difficile », soit : (« mon manque de travail » ou « cours trop difficile ») entraîne « ma mauvaise note »

Analyse logique des propositions

D'une manière générale, le calcul propositionnel ne se préoccupe que des valeurs de vérité, et pas du tout des liens sémantiques qui peuvent exister entre des propositions. Ces dernières sont reliées entre elles syntaxiquement par des connecteurs comme « ou » ou « entraîne ». Les connecteurs logiques sont donc des symboles qui permettent de produire des propositions (« plus complexes ») à partir d'autres propositions (« plus simples »). En calcul propositionnel, ils sont définis axiomatiquement à partir de leurs tables de vérité.

Tables de vérité des connecteurs logiques

Disjonction logique : Connecteur « ou », symbole $\vee$.
À partir de deux propositions P et Q, ce connecteur permet la construction de la nouvelle proposition (P ou Q) [notée P$\vee$ Q], dont la valeur de vérité est définie par la table de vérité :

P	Q	$P \vee Q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

On remarque que $P \vee Q$ est fausse si et seulement si les deux propositions P et Q sont fausses.

Disjonction logique : Connecteur « ou », symbole $\vee$.
Remarque : Dans le langage courant, le mot « ou » est souvent employé de deux façons distinctes :

- il est parfois utilisé avec le sens « les deux cas peuvent se produire » (comme ici) et,
- parfois avec le sens «p ou q,mais pas les deux» (e.g.«il ira à Paris ou à Marseille»).

Sauf indication contraire, le «ou» sera toujours employé avec cette première signification.

Conjonction logique : Connecteur « et », symbole $\wedge$.
À partir de deux propositions P et Q, ce connecteur permet la construction de la nouvelle proposition (P et Q) [notée $P \wedge Q$], dont la valeur de vérité est définie par la table de vérité :

P	Q	$P \wedge Q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

On remarque que $P \wedge Q$ est vraie si et seulement si les deux propositions P et Q sont vraies.

Négation logique : Connecteur « non », symbole $\neg$.
À partir d'une proposition P, ce connecteur permet de construire la nouvelle proposition (non P) [notée $\neg P$], dont la valeur de vérité est définie par la table de vérité :

P	$\neg P$
F	V
V	F

Implication logique : Connecteur « non », symbole $\Rightarrow$. À partir de deux propositions P et Q, ce connecteur permet la construction de la proposition (Si P, alors Q) [notée $P \Rightarrow Q$], dont la valeur de vérité est définie par la table de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Remarque : Lorsque la proposition P est fausse, la proposition « Si P, alors Q » est vraie, quelle que soit la valeur de vérité de la proposition Q.

Implication logique : Connecteur « non », symbole $\Rightarrow$.
La manière de mener un raisonnement qui utilise éventuellement des propositions qui se présentent sous la forme d'implications logiques est l'objet de la théorie de la déduction qui sera étudiée plus loin.

Equivalence logique : Connecteur « si et seulement si », symbole $\Longleftrightarrow$.
À partir de deux propositions P et Q, ce connecteur permet la construction de la nouvelle proposition (P si et seulement si Q) [notée $P \Longleftrightarrow Q$], dont la valeur de vérité est donnée par la table de vérité :

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Remarque : Même remarque que pour l'implication logique : l'équivalence logique de deux propositions fausses est une proposition vraie.

Variables et formules propositionnelles

Comme le calcul propositionnel ne s'occupe que des valeurs de vérité, il est possible, dans une expression logique, de remplacer chaque proposition donnée par un symbole (en général, une lettre de l'alphabet majuscule), ou variable propositionnelle et d'étudier ensuite les valeurs de vérité de l'expression en fonction des valeurs de vérité de ces symboles.

Variables et formules propositionnelles

Propriété

Les règles (de syntaxe) qui permettent de former des formules propositionnelles sont les suivantes :

- *toute variable propositionnelle est une formule propositionnelle ;*
- *si F et G sont des formules propositionnelles, alors $\neg(F), (F) \vee (G), (F) \wedge (G), (F) \Rightarrow (G)$ et $(F) \Longleftrightarrow (G)$ sont des formules propositionnelles.*

Remarque : Ce ne sont plus des propositions, en ce sens qu'elles n'ont en général pas de valeur de vérité déterminée. Cette dernière est une fonction des valeurs de vérité des variables propositionnelles qui interviennent dans l'expression de la formule propositionnelle.

Variables et formules propositionnelles

Lorsqu'on remplace, dans une formule propositionnelle, les variables propositionnelles par des propositions, l'assemblage obtenu est une proposition. Cependant, une formule propositionnelle n'est pas une proposition : $A \Rightarrow B$ n'est ni vrai ni faux.

Propriété

Les conventions de priorité des connecteurs logiques sont les suivantes (par ordre de priorité décroissante) :

- *la négation,*
- *la conjonction et la disjonction (au même niveau),*
- *l'implication et l'équivalence (au même niveau).*

Variables et formules propositionnelles

Exemple : $\neg A \vee B \Rightarrow C$ doit être interprété par $((\neg A) \wedge B) \Rightarrow C$ et $A \vee B \wedge C$ n'a pas de sens, car les deux connecteurs ont même niveau de priorité.

Propriété

Les opérateurs $\vee$ *et* $\wedge$ *sont associatifs :*

- $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C) = A \vee B \vee C,$
- $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C) = A \wedge B \wedge C.$

Mais le parenthésage est obligatoire quand $\vee$ *et* $\wedge$ *se trouvent dans la même proposition, puisqu'il n'y a pas de priorité entre* $\vee$ *et* $\wedge$: $(A \vee B) \wedge \neq A \vee (B \wedge C)$.

Variables et formules propositionnelles

Remarque : L'implication n'est pas associative : $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \neq (A \Rightarrow B) \Rightarrow C$. Donc les parenthèses sont obligatoires. Il en est de même pour $\Longleftrightarrow$, et à fortiori quand ces deux opérateurs sont mélangés dans une même proposition.

Dans ce qui suit, on donne un sens aux symboles représentant les connecteurs logiques en fonction de la valeur de vérité des propositions de base (ainsi $\neg$ signifie non).

Fonctions de vérité

Soit F une formule propositionnelle, dans l'expression de laquelle interviennent les variables propositionnelles $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$. À chacune de ces variables propositionnelles, on associe une variable booléenne (généralement la même lettre de l'alphabet, mais en minuscules), qui représente la valeur de vérité qu'elle peut prendre (faux ou vrai, F ou V, 0 ou 1).

Fonctions de vérité

Définition

La fonction de vérité de F est la fonction booléenne Φ_F des n variables booléennes concernées, obtenue de la manière suivante :

- *Si F est de la forme P , où P est une variable propositionnelle, alors $\Phi_F(p) = p$.*
- *Si F est de la forme $\neg G$, où G est une formule propositionnelle, alors $\Phi_F = \overline{\Phi_G}$.*
- *Si F est de la forme $G \vee H$, où G et H sont des formules propositionnelles, alors $\Phi_F = \Phi_G + \Phi_H$.*
- *Si F est de la forme $G \wedge H$, où G et H sont des formules propositionnelles, alors $\Phi_F = \Phi_G . \Phi_H$.*

Fonctions de vérité

Définition

La fonction de vérité de F est la fonction booléenne Φ_F des n variables booléennes concernées, obtenue de la manière suivante (suite) :

- *Si F est de la forme $G \Rightarrow H$, où G et H sont des formules propositionnelles, alors $\Phi_F = \overline{\Phi_G} + \Phi_H$.*
- *Si F est de la forme $G \Longleftrightarrow H$, où G et H sont des formules propositionnelles, alors $\Phi_F = \overline{\Phi_G}.\overline{\Phi_H} + \Phi_G.\Phi_H$.*

Remarque : Soit $F = P \Rightarrow Q$, $G = \neg Q \Rightarrow \neg P$. On a
$\Phi_F(p, q) = \bar{p} + q$ et
$\Phi_G(p, q) = \overline{\Phi_{\neg Q}} + \Phi_{\neg P} = \bar{\bar{q}} + \bar{p} = \Phi_F(p, q)$.

Fonctions de vérité

On remarque que les deux fonctions de vérités $\Phi_F(p, q)$ et $\Phi_G(p, q)$ sont identiques. On en déduit que $P \Rightarrow Q$ et $\neg Q \Rightarrow \neg P$ sont logiquement équivalentes.
$\neg Q \Rightarrow \neg P$ est appelée implication contraposée de l'implication $P \Rightarrow Q$. **Remarque :** Il est clair que les « tables de vérité » des connecteurs logiques sont les mêmes que les tables des opérations booléennes sur faux, vrai

- de la négation booléenne (pour la négation logique),
- de la somme booléenne (pour la disjonction logique),
- du produit booléen (pour la conjonction logique),

Ainsi, la détermination de la valeur de vérité d'une proposition composée se ramène à un simple calcul en algèbre de Boole sur la fonction de vérité de la formule propositionnelle associée.

Formules propositionnelles particulières

On verra dans cette section deux formules particulières : les tautologies et les antilogies.

Tautologies

Définition

Toute formule propositionnelle dont la fonction de vérité est la fonction référentielle est appelée tautologie.

Ainsi, une tautologie est une formule propositionnelle dont la fonction de vérité est indépendante des valeurs de vérité associées à ses variables. Autrement dit, quelle que soit la valeur de vérité des propositions par lesquelles on remplacerait les variables propositionnelles, la proposition obtenue serait vraie.

Formules propositionnelles particulières

Notation : La notation utilisée pour marquer une tautologie F est ⊨ F (se lit : « F est une tautologie »).

Exemple : Soit $F = A \Rightarrow A$. Comme $\Phi_F(a) = \bar{a} + a = 1$, on a ⊨ F.

Exemple : $F = (A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C))$.

$\Phi_F(a,b,c) = \overline{\Phi_{A\Rightarrow C}}(a,c) + \overline{\Phi_{B\Rightarrow C}}(b,c) + \Phi_{A\vee B\Rightarrow C}(a,b,c) =$
$\overline{\bar{a}+c} + \overline{\bar{b}+c} + \overline{a+b} + c = a\bar{c} + b\bar{c} + \bar{a}\bar{b} + c =$
$a + b + \bar{a}\bar{b} + c = 1 + c = 1$

Il ne faudrait pas croire, au vu de ces exemples simples, que les tautologies se ramènent toutes à des trivialités totalement inintéressantes et indignes d'être énoncées. Ainsi, dans une théorie mathématique, tous les théorèmes sont des tautologies ; la reconnaissance de cette propriété n'est cependant pas toujours complètement évidente.

Antilogies

Définition

Toute formule propositionnelle dont la fonction de vérité est la fonction nulle est appelée antilogie .

La proposition obtenue en remplaçant les variables par des propositions ne peut alors jamais être vraie.
Exemple : Soit $F = A \wedge \neg A$. $\Phi_F(a) = a.\bar{a} = 0$. Donc F est bien une antilogie.

Conséquences logiques
Soit $\mathcal{F} = \{F_1, \cdots, F_n\}$ un ensemble de formules propositionnelles.

Définition

On dit que la formule propositionnelle A est une conséquence logique des formules propositionnelles $F_1, \cdots, F_n$ lorsque, chaque fois que les fonctions de vérité $\Phi_{F_1}, \cdots, \Phi_{F_n}$ prennent simultanément la valeur «vrai» (ou1), il en est de même pour la fonction de vérité de la forme A.

Notation : On note ce résultat : $\{F_1, \cdots, F_n\} \models A$ (se lit : A est conséquence logique de $\{F_1, \cdots, F_n\}$).

Exemple : On reconsidère l'ensemble des deux formules propositionnelles $\{P, P \Rightarrow Q\}$ et on va montrer autrement que Q est conséquence logique de ces deux formules. Autrement dit, on va remontrer que $\{P, P \Rightarrow Q\} \models Q$.

- $\Phi_P(p) = p$: prend la valeur 1 lorsque p prend la valeur 1.
- $\Phi_{P \Rightarrow Q}(p, q) = \bar{p} + q$: prend la valeur 1 lorsque p=0 (quelle que soit la valeur de q) et lorsque p=1 et q=1.
- $\Phi_P(p)$ et $\Phi_{P \Rightarrow Q}(p, q)$ prennent simultanément la valeur 1 uniquement lorsque p=1 et q=1 ; dans ce cas $\Phi_Q(q) = q = 1$ aussi. Donc Q est conséquence logique de $\{P, P \Rightarrow Q\}$

Formules équivalentes

Définition

Si la formule propositionnelle G est conséquence logique de la formule propositionnelle F et si F est aussi conséquence logique de G, alors ces deux formules sont dites équivalentes (que l'on note ≈), soit :

$$\{F\} \vDash G \textit{ et } \{G\} \vDash F \textit{ si et seulement si } F \approx G.$$

C'est cette notion de formules équivalentes qui autorise le remplacement d'une expression par une autre (équivalente, bien sûr) dans une formule propositionnelle.
Remarque : On est autorisé à remplacer $\neg\neg A$ par A, puisque ces formules sont équivalentes.

Simplification du calcul des fonctions de vérité
Théorème de substitution

Théorème

Soit F une formule propositionnelle dans laquelle interviennent les variables propositionnelles $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$. Supposons que l'on remplace ces variables par des formules propositionnelles $G_1, G_2, G_3, \cdots, G_n$; la nouvelle formule propositionnelle obtenue est notée F^*.
Dans ces conditions : si $\models F$, alors $\models F^*$.

Preuve : F étant une tautologie, sa fonction de vérité ne dépend pas des valeurs de vérité des variables booléennes, qui peuvent donc être remplacées par n'importe quelle fonction booléenne.

Simplification du calcul des fonctions de vérité
Théorème de substitution

Attention, la réciproque n'est pas vraie...

Exemple : Soit $F = A \Rightarrow B$ et $F^* = P \wedge \neg P \Rightarrow Q$, obtenue à partir de F en remplaçant A par $P \wedge \neg P$ et B par Q. Comme $\Phi_{F^*}(p, q) = \overline{p.\bar{p}} + q = \bar{0} + q = 1 + q = 1$ alors F^* est une tautologie.

Exemple : La formule propositionnelle $F^* = ((P \Rightarrow Q \wedge \neg R) \vee (\neg S \iff T)) \Rightarrow (P \Rightarrow Q \wedge \neg R) \vee (\neg S \iff T))$ est compliquée puisqu'elle contient 5 variables propositionnelle. il y a donc 32 lignes à calculer pour obtenir les valeurs de la fonction de vérité. Cependant, il suffit de remarquer que F^* est obtenue à partir de $F = A \Rightarrow A$, qui est une tautologie ; donc F^* en est une aussi.

Simplification du calcul des fonctions de vérité

Théorème de substitution

Exemple : La formule propositionnelle

Ce résultat peut évidemment être appliqué aussi à des parties de formules propositionnelles, pour accélérer le calcul de leurs fonctions de vérité : si une partie d'une formule propositionnelle constitue à elle seule une tautologie, la partie correspondante de la fonction de vérité peut être avantageusement remplacée par 1.

Simplification du calcul des fonctions de vérité
Théorème de la validité

Théorème

Soit $\{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$ *un ensemble de formules propositionnelles et H une formule propositionnelle ; alors :* $\{G_1, G_2, \cdots, G_n\} \models G_n \Rightarrow$ *H si et seulement si* $\{G_1, G_2, \cdots, G_n\} \models H$

Preuve Si : Supposons que $\{G_1, G_2, \cdots, G_n\} \models H$, c'est à dire, chaque fois que les formules de $\{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$ sont vraies, H l'est aussi. Supposons que les formules $\{G_1, G_2, \cdots, G_{n-1}\}$ soient vraies :

Simplification du calcul des fonctions de vérité
Théorème de la validité
Preuve Si :

- Alors, si G_n est vraie, toutes les formules de $\{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$ sont vraies, et donc, d'après l'hypothèse, H est vraie. Dans ce cas (voir table de vérité de l'implication logique), $G_n \Rightarrow H$ est vraie.
- Et si G_n n'est pas vraie, alors $G_n \Rightarrow H$ est vraie.

Seulement si. Supposons $\{G_1, G_2, \cdots, G_n\} \models G_n \Rightarrow H$. En d'autres termes, chaque fois que les formules de $\{G_1, G_2, \cdots, G_{n-1}\}$ sont vraies, $G_n \Rightarrow H$ est vraie. Regardons si H est une con- séquence logique de $\{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$ en distinguant selon que G_n est vraie ou pas.

Simplification du calcul des fonctions de vérité
Théorème de la validité
Seulement si.

- soit lorsque G_n n'est pas vraie, indépendamment de la valeur de vérité de H sur laquelle on ne peut alors rien dire, mais peu importe, puisque, dans ce cas, les formules de $\{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$ ne sont pas toutes vraies, puisque Gn n'est pas vraie.
- soit lorsque G_n est vraie, et, dans ce cas, on sait que H est obligatoirement vraie aussi. Ceci se produit chaque fois que toutes les formules de $\{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$ sont vraies, et, dans ce cas, H l'est aussi. Donc $\{G_1, G_2, \cdots, G_n\} \models H$

Simplification du calcul des fonctions de vérité

Théorème de la validité

Exemple : Soit à montrer que :

$$\models (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)).$$

On pourrait bien entendu déterminer la fonction de vérité de cette formule. Mais, d'après le théorème précédent, la démonstration du résultat demandé est équivalente à celle de :

$$\{A \Rightarrow (B \Rightarrow C)\} \models (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C).$$

Une nouvelle application de ce même théorème nous montre que la démonstration demandée est encore équivalente à celle de :

$$\{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), (A \Rightarrow B)\} \models (A \Rightarrow C).$$

Simplification du calcul des fonctions de vérité

Théorème de la validité

Exemple : Soit à montrer que : Et enfin à celle de :

$$\{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), (A \Rightarrow B), A\} \models C.$$

Or les fonctions de vérité de $\{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), (A \Rightarrow B), A\}$ sont :

$$\left\{ \begin{array}{r} \bar{a} + \bar{b} + c \\ \bar{a} + b \\ a \end{array} \right.$$

qui valent simplement 1 quand

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{array} \right.$$

Ainsi C est vraie et on a terminé la démonstration.