Calcul propositionnel: déductions syntaxiques

L2 Informatique - UFR S.A.T

Pr. Ousmane THIARE

othiare@ugb.edu.sn
[www.ousmanethiare.com]

16 avril 2020

Calcul propositionnel : déductions syntaxiques

Chapitre VII : Calcul propositionnel : déductions syntaxiques

Il s'agit ici d'explorer les mécanismes du raisonnement humain, c'est-à-dire les schémas de pensée qui nous permettent de décider d'agir d'une certaine manière, dans le but d'obtenir un certain résultat.
En théorie de la démonstration, une preuve est un objet mathématique. Elle est classiquement représentée comme une structure de donnée (liste, arbre,. . .). Elle est construite à l'aide d'axiomes logiques et de règles d'inférence. Plus formellement :

Définition

Un axiome logique est une tautologie qui sert de « point de départ » aux déductions du système formel.

Définition

Une règle d'inférence est une règle qui, à partir de formule(s) prémisses, produit une formule conclusion.

Définition

Un résultat obtenu par une déduction correcte ou une suite de déductions correctes (c'est-à-dire qui utilisent explicitement les règles d'inférence autorisées) à partir des axiomes logiques et, éventuellement, d'autres résultats du même type déjà établis par ailleurs s'appelle un théorème logique.

On exprime que la formule F est un théorème par la notation : $\vdash F$, qui se lit « F est un théorème ».

Définition

Une règle d'inférence est une règle qui, à partir de formule(s) prémisses, produit une formule conclusion.

Définition

La chaîne de déductions qui conduit à un théorème logique est appelée démonstration de ce résultat.

Il est possible d'utiliser des formules logiques supplémentaires (autres que des axiomes ou des théorèmes) et de mener un raisonnement correct à partir de ces formules (et des axiomes et des théorèmes déjà connus). On parle alors de démonstration sous hypothèses. L'affirmation « la formule logique H est démontrée sous les hypothèses $G_1, G_2, \cdots, G_n$ » est notée $\{G_1, G_2, \cdots, G_n\} \vdash H$.

Présentation de la théorie de la démonstration
Démonstrations avec ou sans hypothèses
Théorème de la déduction
Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes
Théorèmes de complétude du calcul propositionnel

Il existe plusieurs systèmes d'axiomes qui permettent de définir la logique propositionnelle. Nous nous en tiendrons à l'ensemble des axiomes suivants, qui n'est ni minimal, ni contradictoire.

Axiomes relatifs à l'implication logique :

- Axiome 1 : $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$
- Axiome 2 : $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$

Axiomes relatifs à la conjonction logique :

- Axiome 3 : $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P \wedge Q)$
- Axiome 4 : $P \wedge Q \Rightarrow P$
- Axiome 5 : $P \wedge Q \Rightarrow Q$

Il existe plusieurs systèmes d'axiomes qui permettent de définir la logique propositionnelle. Nous nous en tiendrons à l'ensemble des axiomes suivants, qui n'est ni minimal, ni contradictoire.

Axiomes relatifs à la disjonction logique :

- Axiome 6 : $P \Rightarrow P \vee Q$
- Axiome 7 : $Q \Rightarrow P \vee Q$
- Axiome 8 : $(P \Rightarrow R) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \vee Q \Rightarrow R))$

Axiomes relatifs à la négation logique :

- Axiome 9 : $\neg\neg P \Rightarrow P$
- Axiome 10 : $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow \neg P)$

Il existe plusieurs systèmes d'axiomes qui permettent de définir la logique propositionnelle. Nous nous en tiendrons à l'ensemble des axiomes suivants, qui n'est ni minimal, ni contradictoire.

Axiomes relatifs à l'équivalence logique :

- Axiome 11 : $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow P) \Rightarrow (P \Longleftrightarrow Q))$
- Axiome 12 : $(P \Longleftrightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$
- Axiome 13 : $(P \Longleftrightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$

On définit la règle d'inférence du modus ponens (le mode « en posant, on pose ») :

$$\{P, P \Rightarrow Q\} \vdash Q$$

Définition

Le système formel composé des 13 axiomes précédents et du modus ponens est nommé « PR ».

Un raisonnement logique peut être rédigé sous forme de démonstration, soit d'un théorème, soit d'une conséquence de certaines hypothèses.

La démonstration d'un théorème est constituée :

- d'un en-tête, portant l'indication «Démonstration» ;
- puis d'un certain nombre de lignes, numérotées (pour pouvoir être référencées dans la suite) ; Chacune comporte deux champs :
  - une formule, qui est le « résultat » de la ligne courante ;
  - la justification du résultat ;
- une dernière ligne, non numérotée, qui porte l'en-tête « Conclusion ».

Dans une ligne, on peut avancer :

- un axiome en remplaçant éventuellement une variable par une formule ;
- un théorème considéré comme connu (dont la démonstration a été vue par ailleurs), en remplaçant éventuellement une variable par une formule ;
- un résultat de l'application d'une règle d'inférence sur des formules écrites dans les lignes précédentes.

Exemple : Soit P une formule propositionnelle. On souhaite démontrer le théorème de réflexivité de l'implication :

$$\vdash (P \Rightarrow P).$$

Démonstration :

1. $(P \Rightarrow (P \Rightarrow P)) \Rightarrow ((P \Rightarrow ((P \Rightarrow P) \Rightarrow P)) \Rightarrow (P \Rightarrow P))$ Axiome 2 $(P \Rightarrow P/Q, P/R)$
2. $P \Rightarrow (P \Rightarrow P)$ Axiome 1 (P/Q)
3. $(P \Rightarrow ((P \Rightarrow P) \Rightarrow P)) \Rightarrow (P \Rightarrow P)$ m.p sur 2 et 1
4. $P \Rightarrow ((P \Rightarrow P) \Rightarrow P)$ Axiome 1 $(P \Rightarrow P/Q)$
5. $(P \Rightarrow P)$ m.p sur 4 et 3

Conclusion : $\vdash (P \Rightarrow P)$

Une démonstration sous hypothèses.

- commence par une première ligne qui comporte les mots « Démonstration sous les hypothèses » suivie de l'écriture de l'ensemble des hypothèses utilisées ;
- puis, comme dans une démonstration de théorème, de lignes numérotées . . . dans lesquelles peuvent figurer les mêmes éléments, auxquels il faut ajouter les hypothèses, dont on a le droit de se servir comme s'il s'agissait de résultats établis ;
- une ligne de conclusion qui rappelle les hypothèses.

Exemple :

L'objectif est d'obtenir $\{P \Rightarrow Q, \neg Q\} \vdash \neg P$ qui est plus connu sous le nom « modus (tollendo) tollens ».

Soit P et Q des formules propositionnelles quelconques, montrons $\neg P$ sous les hypothèses $P \Rightarrow Q$ et $\neg Q$:

Démonstration sous les hypothèses $\{P \Rightarrow Q, \neg Q\}$

1	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow \neg P)$	Axiome 10
2	$P \Rightarrow Q)$	Hypothèse 1
3	$(P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow \neg P$	m.p sur 2 et 1
4	$\neg Q \Rightarrow (P \Rightarrow \neg Q)$	Axiome 1
5	$\neg Q$	Hypothèse 2
6	$(P \Rightarrow \neg Q)$	m.p sur 5 et 4
7	$\neg P$	m.p sur 6 et 3

Conclusion : $\{P \Rightarrow Q, \neg Q\} \vdash \neg P$

Les démonstrations sont souvent considérablement simplifiées par l'utilisation du théorème de la déduction donné ci-après.

Propriété

Ce théorème s'énonce par :
$\{G_1, G_2, \cdots, G_n\} \vdash H$ *si et seulement si*
$\{G_1, G_2, \cdots, G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow H$

Preuve : La démonstration s'effectue par récurrence sur la longueur de la déduction.
Seulement si. Hypothèse : $\{G_1, G_2, \cdots, G_n\} \vdash H$. Soit p la longueur de la déduction qui amène à H.
Si p=1 : une « déduction de longueur 1 » n'autorise l'écriture que d'une seule ligne. Cela signifie donc que l'on peut directement écrire H dans celle-ci. Ce n'est possible que si H est un axiome ou une hypothèse.

Si H est un axiome :

Démonstration sous les hypothèses $\{G_1, G_2, \cdots, G_{n-1}\}$:

1	$H \Rightarrow (G_n \Rightarrow H)$	Axiome 1
2	H	Axiome j
3	$G_n \Rightarrow H$	m.p sur 2 et 1

Conclusion : $\{G_1, G_2, \cdots, G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow H$

Dans ce premier cas : $\{G_1, G_2, \cdots, G_n\} \vdash H$ implique $\{G_1, G_2, \cdots, G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow H$ (Les hypothèses ne sont en fait pas utilisées, donc elles n'interviennent pas).

Si H est l'une des hypothèses $\{G_1, G_2, \cdots, G_{n?1}\}$, posons $H = G_i$ $(0<i<n)$:

Démonstration sous les hypothèses $\{G_1, G_2, \cdots, G_{n-1}\}$:

1. $G_i \Rightarrow (G_n \Rightarrow G_i)$ — Axiome 1
2. G_i — Hypothèse
3. $G_n \Rightarrow G_i$ — m.p sur 2 et 1

Conclusion : $\{G_1, G_2, \cdots, G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow H$

Dans ce deuxième cas : $\{G_1, G_2, \cdots, G_n\} \vdash H$ implique $\{G_1, G_2, \cdots, G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow H$ (Seule l'hypothèse G_i a été utilisée, les autres ne sont en fait pas utilisées, elles n'interviennent pas).

Si H est l'hypothèse Gn : Alors on sait que : $\vdash G_n \Rightarrow G_n$ (voir paragraphe précédent). Dans ce troisième cas :
$\{G_1, G_2, \cdots, G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow H$ implique
$\{G_1, G_2, \cdots, G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow H$
Conclusion : la propriété est vraie pour p = 1.
Hypothèse de récurrence : Soit p un entier tel que la propriété soit vraie pour tous les entiers i de 1 à p (récurrence généralisée) ; on suppose que la longueur de la déduction qui mène à H est (p+1).
Si H est un axiome ou l'une des hypothèses, le cas se traite comme ci-dessus.

Dans le cas contraire, H ne peut avoir été obtenu que par un « modus ponens » sur des formules P et $P \Rightarrow H$. Ces formules ont elles-mêmes été obtenues par des déductions de longueur inférieure ou égale à p, donc on peut dire que

$\{G_1, G_2, \cdots, G_n\} \vdash P$ implique

$\{G_1, G_2, \cdots, G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow P$ et que

$\{G_1, G_2, \cdots, G_n\} \vdash P \Rightarrow H$ implique

$\{G_1, G_2, \cdots, G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow (P \Rightarrow H)$.

Démonstration sous les hypothèses $\{G_1, G_2, \cdots, G_{n-1}\}$:

1. $G_n \Rightarrow P$ Résultat intermédiaire 1
2. $G_n \Rightarrow (P \Rightarrow H)$ Résultat intermédiaire 2
3. $(G_n \Rightarrow P) \Rightarrow ((G_n \rightarrow (P \Rightarrow H)) \Rightarrow (G_n \Rightarrow H))$ Axiome 2
4. $(G_n \Rightarrow (P \Rightarrow H)) \Rightarrow (G_n \Rightarrow H)$ m.p sur 1 et 3
5. $G_n \Rightarrow H$ m.p sur 2 et 4

Conclusion : $\{G_1, G_2, \cdots, G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow H$, et donc : $\{G_1, G_2, \cdots, G_n\} \vdash H$ implique $\{G_1, G_2, \cdots, G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow H$, lorsque la déduction est de longueur p+1.

Si. Réciproquement, supposons $\{G_1, G_2, \cdots, G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow H$
Démonstration sous les hypothèses $\{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$:

1. $G_n \Rightarrow H$ Résultat obtenu sous les hyp. $\{G_1, G_2, \cdots, G_{n-1}\}$
2. G_n Hypothèse n
3. H m.p sur 2 et 1

Conclusion : $\{G_1, G_2, \cdots, G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow H$
Donc : $\{G_1, G_2, \cdots, G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow H$ entraîne $\{G_1, G_2, \cdots, G_n\} \vdash H$.

Exemple : On cherche à montrer le théorème d'échange des prémisses :

$$\vdash (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \Rightarrow R))$$

La démonstration de ce théorème équivaut à la démonstration sous hypothèses

$$\{P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)\} \vdash (Q \Rightarrow (P \Rightarrow R)),$$

équivalente à la démonstration sous hypothèses

$$\{P \Rightarrow (Q \Rightarrow R), Q\} \vdash (P \Rightarrow R),$$

elle-même équivalente à la démonstration sous hypothèses

$$\{P \Rightarrow (Q \Rightarrow R), Q, P\} \vdash R$$

qui est obtenu comme suit :

Démonstration sous les hypothèses $\{P \Rightarrow (Q \Rightarrow R), Q, P\}$

1. P — Hypothèse
2. $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ — Hypothèse
3. $Q \Rightarrow R$ — m.p sur 1 et 2
4. Q — Hypothèse
5. R — m.p sur 4 et 3

Conclusion : $\{P \Rightarrow (Q \Rightarrow R), Q, P\} \vdash R$.

Remarque : Cette méthode est beaucoup plus rapide que celle qui consisterait à essayer de démontrer ce théorème à partir des axiomes et de la règle d'inférence.
Remarque : L'utilisation principale du théorème de la déduction consiste à remplacer la démonstration d'implication par des déductions sous hypothèses.

Au théorème de réflexivité de l'implication ($\vdash P \Rightarrow P$) et au théorème d'échange des prémisses ($\vdash (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \Rightarrow R))$) on ajoute ceux qui suivent.

Propriété

Soit P et Q deux formules propositionnelles quelconques.

$$\vdash (P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$$

Définition

L'implication $\neg Q \Rightarrow \neg P$ est appelée contraposée de l'implication $P \Rightarrow Q$.

Propriété

Soit P et Q deux formules propositionnelles quelconques.

$$\vdash (P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

Propriété

Soit P et Q deux formules propositionnelles quelconques.

$$\vdash \neg P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$$

Intuitivement, cela signifie que si $\neg P$ et P sont établies, alors on peut en déduire n'importe quoi (Q).

On introduit une règle permettant de s'abstraire de l'application de deux modus ponens sur l'axiome 8. En effet, considérons l'axiome 8 :

$$\vdash (P \Rightarrow R) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \vee Q \Rightarrow R))$$

En appliquant deux fois de suite le théorème de la déduction, il est équivalent à la déduction :

$$\{P \Rightarrow R, Q \Rightarrow R\} \vdash P \vee Q \Rightarrow R$$

que l'on peut utiliser sous cette forme comme règle d'inférence annexe : elle s'appelle règle de disjonction des cas.

Propriété

On a

$$\{P \Rightarrow R, Q \Rightarrow R\} \vdash P \vee Q \Rightarrow R$$

Pour finir, en appliquant deux fois de suite le théorème de la déduction à l'axiome 10 :

$$\vdash (P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow \neg P)$$

il est équivalent à la déduction

$$\{P \Rightarrow Q, P \Rightarrow \neg Q\} \vdash \neg P$$

que l'on peut utiliser sous cette forme comme règle d'inférence annexe : elle s'appelle règle de réduction à l'absurde.

Propriété

On a

$$\{P \Rightarrow Q, P \Rightarrow \neg Q\} \vdash \neg P$$

On a jusqu'à maintenant deux points de vue :

1. La théorie des valeurs de vérité, avec ses
   - tables de vérités,
   - fonctions de vérités,
   - tautologie, conséquence, hypothèse.
2. La théorie de la démonstration, avec ses
   - axiomes,
   - règles d'inférence,
   - démonstrations (ou démonstrations sous hypothèses).

On peut se demander si les résultats obtenus dans chacune des deux théories sont identiques : une formule propositionnelle est-elle démontrable si et seulement si elle est une tautologie ?
Un sens est immédiat, c'est le « seulement si » : toute proposition démontrée résulte d'un axiome ou de l'application d'une règle sur des propositions déjà démontrées. On peut facilement de vérifier que les axiomes fournissent des tautologies et que les règles conservent les tautologies. Toute proposition démontrée est donc une tautologie. On dit que le système déductif PR est correct. L'autre sens la démonstration qui consiste à vérifier que toute tautologie admet une démonstration dans PR est un peu plus complexe et admise. Pour ce sens on dit que PR est complet.

On retiendra les théorèmes suivants (abusivement nommés théorèmes de complétude).

Théorème

Tout théorème est une tautologie et réciproquement, soit :
$\vdash F$ *si et seulement si* $\models F$

Théorème

On a
$\{P_1, P_2, \cdots, P_n\} \vdash Q$ *si et seulement si*
$\{P_1, P_2, \cdots, P_n\} \models Q$