



# Calcul propositionnel: déductions syntaxiques

L2 Informatique - UFR S.A.T

Pr. Ousmane THIARE

`othiare@ugb.edu.sn`  
`[www.ousmanethiare.com]`

10 mai 2024

Présentation de  
la théorie de la  
démonstration

Démonstrations  
avec ou sans  
hypothèses

Théorème de la  
déduction

Quelques  
théorèmes  
classiques et  
quelques règles  
d'inférence  
annexes

Théorèmes de  
complétude du  
calcul  
propositionnel

# Calcul propositionnel : déductions syntaxiques

# Chapitre VII : Calcul propositionnel : déductions syntaxiques

Présentation de  
la théorie de la  
démonstration

Démonstrations  
avec ou sans  
hypothèses

Théorème de la  
déduction

Quelques  
théorèmes  
classiques et  
quelques règles  
d'inférence  
annexes

Théorèmes de  
complétude du  
calcul  
propositionnel

- 1 Présentation de la théorie de la démonstration
- 2 Démonstrations avec ou sans hypothèses
- 3 Théorème de la déduction
- 4 Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes
- 5 Théorèmes de complétude du calcul propositionnel



# Calcul propositionnel : déductions syntaxiques

Présentation de la théorie de la démonstration

Présentation de la théorie de la démonstration

Démonstrations avec ou sans hypothèses

Théorème de la déduction

Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes

Théorèmes de complétude du calcul propositionnel

Il s'agit ici d'explorer les mécanismes du raisonnement humain, c'est-à-dire les schémas de pensée qui nous permettent de décider d'agir d'une certaine manière, dans le but d'obtenir un certain résultat.

En théorie de la démonstration, une preuve est un objet mathématique. Elle est classiquement représentée comme une structure de donnée (liste, arbre, . . . ). Elle est construite à l'aide d'axiomes logiques et de règles d'inférence. Plus formellement :

## Définition

*Un axiome logique est une tautologie qui sert de « point de départ » aux déductions du système formel.*



# Calcul propositionnel : déductions syntaxiques

Présentation de la théorie de la démonstration

Présentation de la théorie de la démonstration

Démonstrations avec ou sans hypothèses

Théorème de la déduction

Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes

Théorèmes de complétude du calcul propositionnel



## Définition

*Une règle d'inférence est une règle qui, à partir de formule(s) prémisses, produit une formule conclusion.*

## Définition

*Un résultat obtenu par une déduction correcte ou une suite de déductions correctes (c'est-à-dire qui utilisent explicitement les règles d'inférence autorisées) à partir des axiomes logiques et, éventuellement, d'autres résultats du même type déjà établis par ailleurs s'appelle un théorème logique.*

# Calcul propositionnel : déductions syntaxiques

Présentation de la théorie de la démonstration

Présentation de la théorie de la démonstration

Démonstrations avec ou sans hypothèses

Théorème de la déduction

Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes

Théorèmes de complétude du calcul propositionnel

On exprime que la formule  $F$  est un théorème par la notation  $\vdash F$ , qui se lit «  $F$  est un théorème ».

## Définition

*Une règle d'inférence est une règle qui, à partir de formule(s) prémisses, produit une formule conclusion.*



# Calcul propositionnel : déductions syntaxiques

Présentation de la théorie de la démonstration

Présentation de la théorie de la démonstration

Démonstrations avec ou sans hypothèses

Théorème de la déduction

Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes

Théorèmes de complétude du calcul propositionnel



## Définition

*La chaîne de déductions qui conduit à un théorème logique est appelée démonstration de ce résultat.*

Il est possible d'utiliser des formules logiques supplémentaires (autres que des axiomes ou des théorèmes) et de mener un raisonnement correct à partir de ces formules (et des axiomes et des théorèmes déjà connus). On parle alors de démonstration sous hypothèses. L'affirmation « la formule logique  $H$  est démontrée sous les hypothèses  $G_1, G_2, \dots, G_n$  » est notée  $\{G_1, G_2, \dots, G_n\} \vdash H$ .

# Calcul propositionnel : déductions syntaxiques

Axiomes logiques et règles d'inférence du système formel « PR »

Présentation de la théorie de la démonstration

Démonstrations avec ou sans hypothèses

Théorème de la déduction

Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes

Théorèmes de complétude du calcul propositionnel

Il existe plusieurs systèmes d'axiomes qui permettent de définir la logique propositionnelle. Nous nous en tiendrons à l'ensemble des axiomes suivants, qui n'est ni minimal, ni contradictoire.

## Axiomes relatifs à l'implication logique :

- Axiome 1 :  $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$
- Axiome 2 :  $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$

## Axiomes relatifs à la conjonction logique :

- Axiome 3 :  $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P \wedge Q)$
- Axiome 4 :  $P \wedge Q \Rightarrow P$
- Axiome 5 :  $P \wedge Q \Rightarrow Q$



# Calcul propositionnel : déductions syntaxiques

Axiomes logiques et règles d'inférence du système formel « PR »

Présentation de la théorie de la démonstration

Démonstrations avec ou sans hypothèses

Théorème de la déduction

Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes

Théorèmes de complétude du calcul propositionnel

Il existe plusieurs systèmes d'axiomes qui permettent de définir la logique propositionnelle. Nous nous en tiendrons à l'ensemble des axiomes suivants, qui n'est ni minimal, ni contradictoire.

## Axiomes relatifs à la disjonction logique :

- Axiome 6 :  $P \Rightarrow P \vee Q$
- Axiome 7 :  $Q \Rightarrow P \vee Q$
- Axiome 8 :  $(P \Rightarrow R) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \vee Q \Rightarrow R))$

## Axiomes relatifs à la négation logique :

- Axiome 9 :  $\neg\neg P \Rightarrow P$
- Axiome 10 :  $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow \neg P)$



# Calcul propositionnel : déductions syntaxiques

Axiomes logiques et règles d'inférence du système formel « PR »

Présentation de la théorie de la démonstration

Démonstrations avec ou sans hypothèses

Théorème de la déduction

Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes

Théorèmes de complétude du calcul propositionnel

Il existe plusieurs systèmes d'axiomes qui permettent de définir la logique propositionnelle. Nous nous en tiendrons à l'ensemble des axiomes suivants, qui n'est ni minimal, ni contradictoire.

## Axiomes relatifs à l'équivalence logique :

- Axiome 11 :  $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow P) \Rightarrow (P \iff Q))$
- Axiome 12 :  $(P \iff Q) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$
- Axiome 13 :  $(P \iff Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$

On définit la règle d'inférence du modus ponens (le mode « en posant, on pose ») :

$$\{P, P \Rightarrow Q\} \vdash Q$$

## Définition

*Le système formel composé des 13 axiomes précédents et du modus ponens est nommé « PR ».*



# Calcul propositionnel : déductions syntaxiques

Axiomes logiques et règles d'inférence du système formel « PR »

Présentation de la théorie de la démonstration

Démonstrations avec ou sans hypothèses

Théorème de la déduction

Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes

Théorèmes de complétude du calcul propositionnel

Un raisonnement logique peut être rédigé sous forme de démonstration, soit d'un théorème, soit d'une conséquence de certaines hypothèses.



# Calcul propositionnel : déductions syntaxiques

## Démonstration d'un théorème

La démonstration d'un théorème est constituée :

- d'un en-tête, portant l'indication «Démonstration» ;
- puis d'un certain nombre de lignes, numérotées (pour pouvoir être référencées dans la suite) ; Chacune comporte deux champs :
  - une formule, qui est le « résultat » de la ligne courante ;
  - la justification du résultat ;
- une dernière ligne, non numérotée, qui porte l'en-tête « Conclusion ».

Dans une ligne, on peut avancer :

- un axiome en remplaçant éventuellement une variable par une formule ;
- un théorème considéré comme connu (dont la démonstration a été vue par ailleurs), en remplaçant éventuellement une variable par une formule ;
- un résultat de l'application d'une règle d'inférence sur des formules écrites dans les lignes précédentes.

Présentation de la théorie de la démonstration

Démonstrations avec ou sans hypothèses

Théorème de la déduction

Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes

Théorèmes de complétude du calcul propositionnel



# Calcul propositionnel : déductions syntaxiques

Démonstration d'un théorème

Présentation de la théorie de la démonstration

Démonstrations avec ou sans hypothèses

Théorème de la déduction

Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes

Théorèmes de complétude du calcul propositionnel

**Exemple :** Soit  $P$  une formule propositionnelle. On souhaite démontrer le théorème de réflexivité de l'implication :

$$\vdash (P \Rightarrow P).$$

**Démonstration :**

- $(P \Rightarrow (P \Rightarrow P)) \Rightarrow ((P \Rightarrow ((P \Rightarrow P) \Rightarrow P)) \Rightarrow (P \Rightarrow P))$   
Axiome 2 ( $P \Rightarrow P/Q, P/R$ )
- $P \Rightarrow (P \Rightarrow P)$   
Axiome 1 ( $P/Q$ )
- $(P \Rightarrow ((P \Rightarrow P) \Rightarrow P)) \Rightarrow (P \Rightarrow P)$   
m.p sur 2 et 1
- $P \Rightarrow ((P \Rightarrow P) \Rightarrow P)$   
Axiome 1 ( $P \Rightarrow P/Q$ )
- $(P \Rightarrow P)$   
m.p sur 4 et 3

**Conclusion :**  $\vdash (P \Rightarrow P)$



# Calcul propositionnel : déductions syntaxiques

## Démonstration sous hypothèses

Présentation de la théorie de la démonstration

Démonstrations avec ou sans hypothèses

Théorème de la déduction

Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes

Théorèmes de complétude du calcul propositionnel

Une démonstration sous hypothèses.

- commence par une première ligne qui comporte les mots « Démonstration sous les hypothèses » suivie de l'écriture de l'ensemble des hypothèses utilisées ;
- puis, comme dans une démonstration de théorème, de lignes numérotées . . . dans lesquelles peuvent figurer les mêmes éléments, auxquels il faut ajouter les hypothèses, dont on a le droit de se servir comme s'il s'agissait de résultats établis ;
- une ligne de conclusion qui rappelle les hypothèses.



# Calcul propositionnel : déductions syntaxiques

## Démonstration sous hypothèses

### Exemple :

L'objectif est d'obtenir  $\{P \Rightarrow Q, \neg Q\} \vdash \neg P$  qui est plus connu sous le nom « modus (tollendo) tollens ».

Soit  $P$  et  $Q$  des formules propositionnelles quelconques, montrons  $\neg P$  sous les hypothèses  $P \Rightarrow Q$  et  $\neg Q$  :

### Démonstration sous les hypothèses $\{P \Rightarrow Q, \neg Q\}$

- |   |   |                |
|---|---|----------------|
| 1 | $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow \neg P)$ | Axiome 10      |
| 2 | $P \Rightarrow Q$   | Hypothèse 1    |
| 3 | $(P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow \neg P$                                 | m.p sur 2 et 1 |
| 4 | $\neg Q \Rightarrow (P \Rightarrow \neg Q)$                                 | Axiome 1       |
| 5 | $\neg Q$  | Hypothèse 2    |
| 6 | $(P \Rightarrow \neg Q)$  | m.p sur 5 et 4 |
| 7 | $\neg P$  | m.p sur 6 et 3 |

**Conclusion :**  $\{P \Rightarrow Q, \neg Q\} \vdash \neg P$

Présentation de la théorie de la démonstration

Démonstrations avec ou sans hypothèses

Théorème de la déduction

Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes

Théorèmes de complétude du calcul propositionnel



# Calcul propositionnel : déductions syntaxiques

## Théorème de la déduction

Les démonstrations sont souvent considérablement simplifiées par l'utilisation du théorème de la déduction donné ci-après.

### Propriété

*Ce théorème s'énonce par :*

$$\{G_1, G_2, \dots, G_n\} \vdash H \text{ si et seulement si } \{G_1, G_2, \dots, G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow H$$

**Preuve :** La démonstration s'effectue par récurrence sur la longueur de la déduction.

**Seulement si.** Hypothèse :  $\{G_1, G_2, \dots, G_n\} \vdash H$ . Soit  $p$  la longueur de la déduction qui amène à  $H$ .

Si  $p=1$  : une « déduction de longueur 1 » n'autorise l'écriture que d'une seule ligne. Cela signifie donc que l'on peut directement écrire  $H$  dans celle-ci. Ce n'est possible que si  $H$  est un axiome ou une hypothèse.

Présentation de la théorie de la démonstration

Démonstrations avec ou sans hypothèses

Théorème de la déduction

Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes

Théorèmes de complétude du calcul propositionnel



# Calcul propositionnel : déductions syntaxiques

## Théorème de la déduction

Présentation de la théorie de la démonstration

Démonstrations avec ou sans hypothèses

Théorème de la déduction

Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes

Théorèmes de complétude du calcul propositionnel

Si  $H$  est un axiome :

### Démonstration sous les hypothèses

$\{G_1, G_2, \dots, G_{n-1}\}$  :

- 1  $H \Rightarrow (G_n \Rightarrow H)$  Axiome 1
- 2  $H$  Axiome  $j$
- 3  $G_n \Rightarrow H$  m.p sur 2 et 1

**Conclusion :**  $\{G_1, G_2, \dots, G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow H$

Dans ce premier cas :  $\{G_1, G_2, \dots, G_n\} \vdash H$  implique  $\{G_1, G_2, \dots, G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow H$  (Les hypothèses ne sont en fait pas utilisées, donc elles n'interviennent pas).



# Calcul propositionnel : déductions syntaxiques

## Théorème de la déduction

Présentation de la théorie de la démonstration

Démonstrations avec ou sans hypothèses

Théorème de la déduction

Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes

Théorèmes de complétude du calcul propositionnel

Si  $H$  est l'une des hypothèses  $\{G_1, G_2, \dots, G_{n+1}\}$ , posons  $H = G_i$  ( $0 < i < n$ ) :

### Démonstration sous les hypothèses

$\{G_1, G_2, \dots, G_{n-1}\}$  :

- 1  $G_i \Rightarrow (G_n \Rightarrow G_i)$  Axiome 1
- 2  $G_i$  Hypothèse
- 3  $G_n \Rightarrow G_i$  m.p sur 2 et 1

**Conclusion :**  $\{G_1, G_2, \dots, G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow H$

Dans ce deuxième cas :  $\{G_1, G_2, \dots, G_n\} \vdash H$  implique  $\{G_1, G_2, \dots, G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow H$  (Seule l'hypothèse  $G_i$  a été utilisée, les autres ne sont en fait pas utilisées, elles n'interviennent pas).



# Calcul propositionnel : déductions syntaxiques

## Théorème de la déduction

Présentation de la théorie de la démonstration

Démonstrations avec ou sans hypothèses

Théorème de la déduction

Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes

Théorèmes de complétude du calcul propositionnel

Si  $H$  est l'hypothèse  $G_n$  : Alors on sait que :  $\vdash G_n \Rightarrow G_n$  (voir paragraphe précédent). Dans ce troisième cas :

$\{G_1, G_2, \dots, G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow H$  implique

$\{G_1, G_2, \dots, G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow H$

Conclusion : la propriété est vraie pour  $p = 1$ .

Hypothèse de récurrence : Soit  $p$  un entier tel que la propriété soit vraie pour tous les entiers  $i$  de 1 à  $p$  (récurrence généralisée) ; on suppose que la longueur de la déduction qui mène à  $H$  est  $(p+1)$ .

Si  $H$  est un axiome ou l'une des hypothèses, le cas se traite comme ci-dessus.



# Calcul propositionnel : déductions syntaxiques

## Théorème de la déduction

Présentation de la théorie de la démonstration

Démonstrations avec ou sans hypothèses

Théorème de la déduction

Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes

Théorèmes de complétude du calcul propositionnel

Dans le cas contraire,  $H$  ne peut avoir été obtenu que par un « modus ponens » sur des formules  $P$  et  $P \Rightarrow H$ . Ces formules ont elles-mêmes été obtenues par des déductions de longueur inférieure ou égale à  $p$ , donc on peut dire que

$\{G_1, G_2, \dots, G_n\} \vdash P$  implique  
 $\{G_1, G_2, \dots, G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow P$  et que  
 $\{G_1, G_2, \dots, G_n\} \vdash P \Rightarrow H$  implique  
 $\{G_1, G_2, \dots, G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow (P \Rightarrow H)$ .



# Calcul propositionnel : déductions syntaxiques

## Théorème de la déduction

Présentation de la théorie de la démonstration

Démonstrations avec ou sans hypothèses

Théorème de la déduction

Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes

Théorèmes de complétude du calcul propositionnel

### Démonstration sous les hypothèses

$\{G_1, G_2, \dots, G_{n-1}\}$  :

- 1  $G_n \Rightarrow P$  Résultat intermédiaire 1
- 2  $G_n \Rightarrow (P \Rightarrow H)$  Résultat intermédiaire 2
- 3  $(G_n \Rightarrow P) \Rightarrow ((G_n \rightarrow (P \Rightarrow H)) \Rightarrow (G_n \Rightarrow H))$   
Axiome 2
- 4  $(G_n \Rightarrow (P \Rightarrow H)) \Rightarrow (G_n \Rightarrow H)$  m.p sur 1 et 3
- 5  $G_n \Rightarrow H$  m.p sur 2 et 4

Conclusion :  $\{G_1, G_2, \dots, G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow H$ , et donc :

$\{G_1, G_2, \dots, G_n\} \vdash H$  implique

$\{G_1, G_2, \dots, G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow H$ , lorsque la déduction est de longueur  $p+1$ .



# Calcul propositionnel : déductions syntaxiques

## Théorème de la déduction

Présentation de la théorie de la démonstration

Démonstrations avec ou sans hypothèses

Théorème de la déduction

Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes

Théorèmes de complétude du calcul propositionnel

**Si.** Réciproquement, supposons

$$\{G_1, G_2, \dots, G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow H$$

**Démonstration sous les hypothèses**  $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$  :

- 1  $G_n \Rightarrow H$       Résultat obtenu sous les hyp.  $\{G_1, G_2, \dots, G_{n-1}\}$
- 2  $G_n$               Hypothèse n
- 3  $H$                 m.p sur 2 et 1

Conclusion :  $\{G_1, G_2, \dots, G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow H$

Donc :  $\{G_1, G_2, \dots, G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow H$  entraîne  $\{G_1, G_2, \dots, G_n\} \vdash H$ .



# Calcul propositionnel : déductions syntaxiques

## Théorème de la déduction

**Exemple** : On cherche à montrer le théorème d'échange des prémisses :

$$\vdash (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \Rightarrow R))$$

La démonstration de ce théorème équivaut à la démonstration sous hypothèses

$$\{P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)\} \vdash (Q \Rightarrow (P \Rightarrow R)),$$

équivalente à la démonstration sous hypothèses

$$\{P \Rightarrow (Q \Rightarrow R), Q\} \vdash (P \Rightarrow R),$$

elle-même équivalente à la démonstration sous hypothèses

$$\{P \Rightarrow (Q \Rightarrow R), Q, P\} \vdash R$$

qui est obtenu comme suit :

Présentation de la théorie de la démonstration

Démonstrations avec ou sans hypothèses

Théorème de la déduction

Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes

Théorèmes de complétude du calcul propositionnel



# Calcul propositionnel : déductions syntaxiques

## Théorème de la déduction

Présentation de la théorie de la démonstration

Démonstrations avec ou sans hypothèses

Théorème de la déduction

Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes

Théorèmes de complétude du calcul propositionnel

### Démonstration sous les hypothèses

$\{P \Rightarrow (Q \Rightarrow R), Q, P\}$

1 P

Hypothèse

2  $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$

Hypothèse

3  $Q \Rightarrow R$

m.p sur 1 et 2

4 Q

Hypothèse

5 R

m.p sur 4 et 3

Conclusion :  $\{P \Rightarrow (Q \Rightarrow R), Q, P\} \vdash R.$



# Calcul propositionnel : déductions syntaxiques

## Théorème de la déduction

Présentation de la théorie de la démonstration

Démonstrations avec ou sans hypothèses

Théorème de la déduction

Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes

Théorèmes de complétude du calcul propositionnel

**Remarque :** Cette méthode est beaucoup plus rapide que celle qui consisterait à essayer de démontrer ce théorème à partir des axiomes et de la règle d'inférence.

**Remarque :** L'utilisation principale du théorème de la déduction consiste à remplacer la démonstration d'implication par des déductions sous hypothèses.



# Calcul propositionnel : déductions syntaxiques

Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes

Présentation de la théorie de la démonstration

Démonstrations avec ou sans hypothèses

Théorème de la déduction

Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes

Théorèmes de complétude du calcul propositionnel

Au théorème de réflexivité de l'implication ( $\vdash P \Rightarrow P$ ) et au théorème d'échange des prémisses ( $\vdash (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \Rightarrow R))$ ) on ajoute ceux qui suivent.

## Propriété

*Soit  $P$  et  $Q$  deux formules propositionnelles quelconques.*

$$\vdash (P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$$

## Définition

*L'implication  $\neg Q \Rightarrow \neg P$  est appelée contraposée de l'implication  $P \Rightarrow Q$ .*



# Calcul propositionnel : déductions syntaxiques

Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes

Présentation de la théorie de la démonstration

Démonstrations avec ou sans hypothèses

Théorème de la déduction

Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes

Théorèmes de complétude du calcul propositionnel

## Propriété

*Soit  $P$  et  $Q$  deux formules propositionnelles quelconques.*

$$\vdash (P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

## Propriété

*Soit  $P$  et  $Q$  deux formules propositionnelles quelconques.*

$$\vdash \neg P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$$

Intuitivement, cela signifie que si  $\neg P$  et  $P$  sont établies, alors on peut en déduire n'importe quoi ( $Q$ ).



# Calcul propositionnel : déductions syntaxiques

Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes

Présentation de la théorie de la démonstration

Démonstrations avec ou sans hypothèses

Théorème de la déduction

Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes

Théorèmes de complétude du calcul propositionnel

On introduit une règle permettant de s'abstraire de l'application de deux modus ponens sur l'axiome 8. En effet, considérons l'axiome 8 :

$$\vdash (P \Rightarrow R) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \vee Q \Rightarrow R))$$

En appliquant deux fois de suite le théorème de la déduction, il est équivalent à la déduction :

$$\{P \Rightarrow R, Q \Rightarrow R\} \vdash P \vee Q \Rightarrow R$$

que l'on peut utiliser sous cette forme comme règle d'inférence annexe : elle s'appelle règle de disjonction des cas.



# Calcul propositionnel : déductions syntaxiques

Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes

## Propriété

On a

$$\{P \Rightarrow R, Q \Rightarrow R\} \vdash P \vee Q \Rightarrow R$$

Pour finir, en appliquant deux fois de suite le théorème de la déduction à l'axiome 10 :

$$\vdash (P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow \neg P)$$

il est équivalent à la déduction

$$\{P \Rightarrow Q, P \Rightarrow \neg Q\} \vdash \neg P$$

que l'on peut utiliser sous cette forme comme règle d'inférence annexe : elle s'appelle règle de réduction à l'absurde.

Présentation de la théorie de la démonstration

Démonstrations avec ou sans hypothèses

Théorème de la déduction

Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes

Théorèmes de complétude du calcul propositionnel



# Calcul propositionnel : déductions syntaxiques

Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes

Présentation de la théorie de la démonstration

Démonstrations avec ou sans hypothèses

Théorème de la déduction

Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes

Théorèmes de complétude du calcul propositionnel

## Propriété

*On a*

$$\{P \Rightarrow Q, P \Rightarrow \neg Q\} \vdash \neg P$$



# Calcul propositionnel : déductions syntaxiques

## Théorèmes de complétude du calcul propositionnel

Présentation de la théorie de la démonstration

Démonstrations avec ou sans hypothèses

Théorème de la déduction

Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes

Théorèmes de complétude du calcul propositionnel

On a jusqu'à maintenant deux points de vue :

- 1 La théorie des valeurs de vérité, avec ses
  - tables de vérités,
  - fonctions de vérités,
  - tautologie, conséquence, hypothèse.
- 2 La théorie de la démonstration, avec ses
  - axiomes,
  - règles d'inférence,
  - démonstrations (ou démonstrations sous hypothèses).



# Calcul propositionnel : déductions syntaxiques

## Théorèmes de complétude du calcul propositionnel

Présentation de la théorie de la démonstration

Démonstrations avec ou sans hypothèses

Théorème de la déduction

Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes

Théorèmes de complétude du calcul propositionnel

On peut se demander si les résultats obtenus dans chacune des deux théories sont identiques : une formule propositionnelle est-elle démontrable si et seulement si elle est une tautologie ?

Un sens est immédiat, c'est le « seulement si » : toute proposition démontrée résulte d'un axiome ou de l'application d'une règle sur des propositions déjà démontrées. On peut facilement vérifier que les axiomes fournissent des tautologies et que les règles conservent les tautologies. Toute proposition démontrée est donc une tautologie. On dit que le système déductif PR est correct. L'autre sens la démonstration qui consiste à vérifier que toute tautologie admet une démonstration dans PR est un peu plus complexe et admise. Pour ce sens on dit que PR est complet.



# Calcul propositionnel : déductions syntaxiques

## Théorèmes de complétude du calcul propositionnel

Présentation de la théorie de la démonstration

Démonstrations avec ou sans hypothèses

Théorème de la déduction

Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférence annexes

Théorèmes de complétude du calcul propositionnel

On retiendra les théorèmes suivants (abusivement nommés théorèmes de complétude).

### Théorème

*Tout théorème est une tautologie et réciproquement, soit :*  
 $\vdash F$  si et seulement si  $\models F$

### Théorème

*On a*  
 $\{P_1, P_2, \dots, P_n\} \vdash Q$  si et seulement si  
 $\{P_1, P_2, \dots, P_n\} \models Q$

