Calcul des prédicats

L2 Informatique - UFR S.A.T

Pr. Ousmane THIARE

othiare@ugb.edu.sn
[www.ousmanethiare.com]

16 avril 2020

Calcul des prédicats

En logique des propositions, « Pierre est le père de Marc » ne comporte aucun connecteur logique : elle ne peut se formaliser que par une variable propositionnelle : A. La proposition « Jean est le père de Sylvie » ne peut être formalisée en logique des propositions que par une variable propositionnelle, B. Après la formalisation, on se retrouve avec deux variables propositionnelles A et B, sans lien aucun entre elles, alors qu'il est évident que ces deux propositions évoquent un même lien de parenté entre des individus différents. Il apparaît primordial de créer un langage qui permettrait de décrire des propriétés accordées à des individus.

Introduction à l'"univers du discours"

La valeur de l'expression « x possède une racine carrée » dépend de x et de l'univers dans lequel on fait évoluer x. Cette expression est

- toujours vraie si l'univers du discours est l'ensemble des réels positifs ;
- toujours fausse si l'univers du discours est l'ensemble des réels strictement négatifs ;
- vraie pour certaines valeurs si l'univers du discours est l'ensemble des entiers naturels.

Considérons les propositions « tous les étudiants sont sérieux » et « certains étudiants sont sérieux ». La propriété évoquée (« être sérieux ») est accordée, par ces propositions, non pas seulement à un individu bien précis, mais à certains individus, considérés dans leur ensemble, ou à toute une catégorie d'individus. Ce troisième exemple suggère la notion de quantification d'une variable (tous les. . . , certains. . .).

Introduction
Définition
Quantificateurs
Sémantique

Le calcul des prédicats fait intervenir des variables, qui prennent des valeurs dans un certain ensemble appelé univers du discours qui par la suite sera souvent noté U .

Définition

Soit f une fonction de $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$ *dans U. Le symbole fonctionnel f est dit d'arité n et on note* f_n*. Lorsque l'expression* $f(x_1, \cdots, x_n)$ *ne dépend pas de* $x_1, \cdots, x_n$*, on peut la remplacer par une constante c de l'univers.*

Définition

Un terme est défini de manière récursive par :

- *une variable,*
- *une constante,*
- *l'expression* $f(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ *si* $t_1, t_2, \cdots, t_n$ *sont des termes et f un symbole fonctionnel d'arité n*

On cherche à formaliser les relations qui peuvent lier des individus de l'univers du discours. Par exemple, « 22 est le double de 11 », « 46 est le double de 45 » sont des propositions qui évoquent la relation « être le double de » entre deux constantes à chaque fois.

Définition

Soit p une fonction de $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$ dans vrai, faux. Le symbole prédicatif p d'arité n (notée p_n) est aussi nommé prédicat p.

Définition

Un atome est de la forme $p(t_1, \cdots, t_n)$, où p est un symbole de prédicat d'arité n et $t_1, \cdots, t_n$ sont des termes.

Considérons la proposition « Tous les étudiants travaillent les mathématiques » pour l'analyser du point de vue du calcul des prédicats. On peut exprimer ceci à l'aide d'un prédicat binaire qui peut être formalisé par travaille(x, y), et qui signifie qu'un individu x travaille une certaine matière y.
La notation utilisée pour cette quantification est « $\forall$ » qui représente un A à l'envers (pour All). Ainsi on représente la proposition ci dessus par

$$\forall x.travaille(x, maths).$$

Définition

$\forall$ est un symbole de quantificateur, appelé le quantificateur universel. On dit alors que $\forall x$ est le quantificateur universel de la variable x.

Remarque : La présence du symbole de quantification est indispensable pour donner du sens aux formules avec variables.

- $\forall x$. travaille(x, maths) est une proposition. La variable x est dite liée au quatificateur $\forall$;
- travaille(x, maths) n'est pas une proposition : on ne peut pas lui attribuer une valeur de vérité. Il est nécessaire de substituer x par un terme distinguant un individu pour que cela le devienne (c'est-à-dire. travaille(Jean, maths) ou bien travaille(fils(Pierre), maths)). Dans cette expression, la variable x est dite libre.

Dans la proposition « Tous les étudiants travaillent au moins une matière », intervient le même prédicat binaire travaille(x, y) ; on remarque qu'aucun étudiant n'est explicitement nommé, pas plus que la matière qu'il travaille. Si le « Tous » induit une quantification universelle, le « au moins une matière » signifie qu'il existe une matière travaillée par cet étudiant. Il suffit alors d'introduire le quantificateur existentiel, représenté par un E (première lettre de Exists) retourné ($\exists$). Cet exemple se traduit alors par

$$\forall x . \exists y . travaille(x, y)$$

où la variable x est liée par le quantificateur universel $\forall x$ et la variable y est liée par le quantificateur existentiel $\exists y$.

Attention : il est interdit d'intervertir des quantificateurs de symboles différents.
exemple :

- $\forall x.\exists y.travaille(x, y)$ signifie que tout étudiant travaille une matière (au moins). Autrement dit, la matière travaillée dépend de cet étudiant, elle n'est éventuellement pas la même pour tous les étudiants.
- La formule $\exists y.\forall x.travaille(x, y)$ signifie qu'il y a une matière que tous les étudiants travaillent. La différence fondamentale avec le cas précédent est que, dans cette dernière affirmation, on affirme que tous les étudiants travaillent la même matière.

Définition

La portée d'un quantificateur dans une formule du calcul des prédicats est la partie de cette formule couverte par ce quantificateur.

Par convention, dans l'écriture d'une formule, un quantificateur est prioritaire sur tout connecteur logique. Sa portée est donc généralement clairement délimitée par une paire de parenthèses, avant le quantificateur jusqu'après la formule elle-même.

Définition

La définition d'une formule est :

- *un atome est une formule,*
- *si P est une formule, si Q est un symbole de quantificateur et si x est un symbole de variable, alors Qx. P est une formule,*
- *si P est une formule, alors* $\neg(P)$ *est une formule,*
- *si P et Q sont des formules, alors* $(P \vee Q), (P \wedge Q), (P \Rightarrow Q), (P \iff Q)$ *sont des formules,*
- *il n' existe pas d' autres manières de construire une formule qu'en appliquant les règles précédentes un nombre fini de fois.*

Le calcul des prédicats utilise, comme le calcul propositionnel, les connecteurs logiques, et produit des propositions. Il est possible d'étendre la notion de « valeur de vérité » au calcul des prédicats. Mais l'étude de la valeur de vérité d'une formule du calcul des prédicats est beaucoup plus compliquée.

- Une expression typique (une forme propositionnelle) du calcul propositionnel est $P \Rightarrow Q$. Les « atomes » sont ici des variables propositionnelles qui peuvent être remplacées par n'importe quelle proposition. Quelle que soit cette proposition, sa valeur de vérité ne peut être que « vrai » ou « faux ». Cela permet de lui associer une simple variable booléenne, sa valeur de vérité, pour obtenir simplement la fonction de vérité $\bar{p} + q$.

- Une expression analogue (une formule) du calcul des prédicats pourrait être $\forall x.p(x, y) \Rightarrow q(x, z)$. Les atomes sont ici des prédicats binaires qui, eux aussi, ne peuvent prendre que les valeurs « vrai » ou « faux », mais pas indépendamment des individus considérés.

Il n'est donc pas possible de remplacer un atome par une simple variable booléenne. Seule une fonction booléenne (de variables non booléennes) peut convenir, pour faire intervenir les valeurs des variables qui sont les arguments du prédicat.

Introduction
Définition
Quantificateurs
Sémantique

- si $f_p(x, y)$ est la fonction booléenne associée au prédicat p(x, y)
- si $f_q(x, z)$ est celle qui est associée à q(x,z),

alors la fonction de vérité de la formule est :
$\overline{f_p(x, y)} + f_q(x, z)$.
Attention, x, y et z ne sont pas ici des variables booléennes, mais elles prennent leurs valeurs dans l'univers du discours. Il n'est donc pas question de « calculer avec x, y et z comme en algèbre de Boole ».

Le seul moyen, en général, pour étudier une telle fonction de vérité est de construire le tableau de ses valeurs, en donnant à x, y et z successivement toutes les valeurs possibles dans l'univers du discours (si celui-ci est infini, on imagine aisément les problèmes qui vont se poser. . .). Les définitions de tautologie et de conséquence logique s'adaptent comme suit.

Définition

Si P et Q sont des formules du calcul des prédicats

- $\vDash P$ *[P est une tautologie] si et seulement si, pour tous les univers du discours possibles, pour tous les prédicats qui interviennent dans P , et pour toutes les valeurs des variables dans chacun des univers, la valeur de vérité de P est « vrai ».*
- $\{P\} \vDash Q$ *[Q est conséquence logique de P] si et seulement si, dans les mêmes conditions que ci-dessus, chaque fois que P est vraie, Q l'est aussi.*
- $P \approx Q$ *[les formules P et Q sont équivalentes] si et seulement si* $\{P\} \vDash Q$ *et* $\{Q\} \vDash P$*.*

Il reste à donner la définition de la fonction de vérité pour les nouveaux symboles introduits (les quantificateurs). . .

- la valeur de vérité de $\forall x.p(x)$ est obtenue en faisant la liste des valeurs de vérité de p(x) pour toutes les valeurs possibles de x dans l'univers du discours : si, pour toute valeur de x, la valeur de vérité de p(x) est vrai, alors la valeur de vérité de $\forall x.p(x)$ est vrai. S'il y a une seule valeur de x pour laquelle la valeur de vérité de p(x) est faux, alors la valeur de vérité de $\forall x.p(x)$ est faux.
- la valeur de vérité de $\exists x.p(x)$ est obtenue en faisant la liste des valeurs de vérité de p(x) jusqu'à ce qu'on trouve vrai. Si on trouve vrai, la valeur de vérité de $\exists x.p(x)$ est vrai. Si, pour tout élément x de l'univers du discours, la valeur de vérité de p(x) est faux, alors celle de $\exists x.p(x)$ est faux.

Bien entendu, dans certains cas, il n'est pas nécessaire d'établir effectivement la table de vérité d'une formule du calcul des prédicats pour prouver qu'il s'agit d'une tautologie. Par exemple, il est bien clair que, pour un atome p(x, y, z), on a :
$\models (\forall x, y, z.p(x, y, z)) \Rightarrow (\forall x, y, z.p(x, y, z))$. Donnons enfin deux exemples pour lesquels la construction d'une table de vérité n'est pas nécessaire :

Exercice :

Montrer que $\models (\forall x.p(x, x)) \Rightarrow (\forall x.(\exists y.p(x, y)))$.

Introduction
Définition
Quantificateurs
Sémantique

De la définition de la valeur de vérité d'une formule quantifiée, on peut déduire :
$\neg(\exists x.p(x)) \approx (\forall x.\neg p(x))$
$\neg(\forall x.p(x)) \approx (\exists x.\neg p(x))$
Voici d'autres résultats d'équivalences entre formules permettant de réduire la portée de quantificateurs.

Propriété

Soit p et q des prédicats unaires. Alors on a les deux équivalences suivantes :
$(\forall x.p(x) \wedge q(x)) \approx (\forall x.p(x)) \wedge (\forall y.q(y))$ *(a)*
$(\exists x.p(x) \vee q(x)) \approx (\exists x.p(x)) \vee (\exists y.q(y))$ *(b)*

Preuve :

Preuve de (a). Si, pour toute valeur de x, p(x) et q(x) sont simultanément vrais, alors, pour toute valeur de x, p(x) est vrai, et, pour toute valeur de y, q(y) est vrai. Réciproquement, si, pour toute valeur de x, p(x) est vrai, et, si, pour toute valeur de y, q(y) est aussi vrai, il est bien évident que, pour toute valeur de x, p(x) et q(x) sont simultanément vrais.

Preuve de (b). S'il existe une valeur de x pour laquelle l'une au moins des deux propriétés p(x) ou q(x) est vraie, il est bien clair qu'il existe une valeur de x pour laquelle p(x) est vraie ou qu'il en existe une pour laquelle q(y) est vraie ; la réciproque est aussi évidente.

Si t est un terme et ϕ est une formule pouvant contenir la variable x, alors ?(t/x) est le résultat du remplacement de toutes les occurrences libres de x par t dans ϕ.
Le résultat du remplacement $\phi(t/x)$ est une formule qui est une conséquence logique de la formule originale ϕ si aucune des variables libre de t ne devient liée suite à ce remplacement. Pour éviter que de telles variables libres deviennent liées il suffit de changer le nom des variables liées de ϕ en des noms frais (qui n'apparaissent pas dans les variables libres de t). L'oubli de cette condition est une cause fréquente d'erreurs de raisonnement.

A titre d'exemple, on considère la formule ϕ définie par $\forall y.y \leq x$ sur l'univers $\mathcal{U}$.

- Si t est un terme sans la variable libre y, alors $\phi(t/x)$ signifie juste que t est l'élément maximal.
- A l'opposé, si t est y, la formule $\phi(y/x)$ est $\forall y.y \leq y$ qui ne dit plus que y est maximal.