



Université Gaston Berger de Saint-Louis

Rappels de calcul matriciel

Pr. Ousmane THIARE

www.ousmanethiare.com

10 mai 2024

Contenu

Matrices

- Définition et notation

- Matrices triangulaires, matrices diagonales

Opérations matricielles

- Opérations linéaires

- Produit matriciel

- Inverse d'une matrice

- Transposée d'une matrice

Noyau, image et rang d'une matrice

- Définitions

- Rang d'une matrice

Matrices et applications linéaires

- Application linéaire associée à une matrice

- Représentation matricielle des éléments de \mathbb{R}^n

- Représentation matricielle des applications linéaires

- Matrices semblables

Déterminant d'une matrice carrée

- Résultats fondamentaux

- Règles de calcul

- Déterminants et opérations matricielles

Contenu

Matrices

Définition et notation

Matrices triangulaires, matrices diagonales

Opérations matricielles

Noyau, image et rang d'une matrice

Matrices et applications linéaires

Déterminant d'une matrice carrée

Matrices

Définition

Une matrice de format (m, n) à coefficients dans K est un tableau de $m \times n$ éléments de K organisés en m lignes et n colonnes. Chaque élément de la matrice est repéré par deux indices, le premier est l'indice de la ligne, le second est l'indice de la colonne.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{ligne } i \\ \\ \text{colonne } j \end{array}$$

Matrices

Notation

- la matrice précédente est notée $A = [a_{i,j}]_{i=1,m;j=1,n}$;
- $a_{i,j}$ ou $(A)_{i,j}$ est le **terme**, l'**élément** ou encore le **coefficient** de la i^{eme} ligne et de la j^{eme} colonne de A ;
- une matrice de format $(n, 1)$ est une **matrice-colonne** d'ordre n ;
- une matrice de format $(1, n)$ est une **matrice-ligne** d'ordre n ;
- une matrice de format (n, n) est une **matrice carrée** d'ordre n ;
- la j^{eme} colonne de la matrice A est notée A_j ou a_j suivant qu'on la considère comme une matrice-colonne ou un vecteur de \mathbb{R}^n ;
réciproquement, la matrice dont les colonnes sont a_1, a_2, \dots, a_n sera notée $[a_1 a_2 \dots a_n]$;
- la i^{eme} ligne de la matrice A est notée A'_i ou a'_i ;
- $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ désigne l'ensemble des matrices de format (m,n) à coefficients dans K et $\mathcal{M}_n(K)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n .

Matrices

Définition : Diagonale principale

La diagonale principale d'une matrice carrée $A = [a_{i,j}]_{i,j=1,n}$ est constituée des éléments de la forme $a_{i,i}$ appelés termes diagonaux de A . On notera $\mathbf{diag}(A)$ le vecteur de \mathbb{R}^n formé des termes diagonaux de A : $\mathbf{diag}(A) = (a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n})$.

La diagonale principale divise A en deux parties :

- la partie sur-diagonale formée des éléments $a_{i,j}$ tels que $i < j$ (éléments sur-diagonaux) ;
- la partie sous-diagonale formée des éléments $a_{i,j}$ tels que $i > j$ (éléments sous-diagonaux) ;

$$\begin{array}{ccc}
 & & \text{termes} \\
 & & \text{sur - diagonaux} \\
 & & \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & \dots & & a_{1n} \\ & & \dots & \\ & & & \dots & \\ a_{n1} & & & & a_{nn} \end{array} \right] \\
 \text{termes} & & & & \\
 \text{sous - diagonaux} & & & &
 \end{array}$$

Contenu

Matrices

Définition et notation

Matrices triangulaires, matrices diagonales

Opérations matricielles

Noyau, image et rang d'une matrice

Matrices et applications linéaires

Déterminant d'une matrice carrée

Matrices

- Une **matrice triangulaire** d'ordre n est une matrice A carrée d'ordre n dont tous les éléments sur-diagonaux ou sous-diagonaux sont nuls :
 - soit $a_{ij} = 0$ pour tous i et j tels que $i > j$, la matrice est alors appelée **triangulaire supérieure**,
 - soit $a_{ij} = 0$ pour tous i et j tels que $i < j$, la matrice est alors appelée **triangulaire inférieure**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

matrice triangulaire supérieure

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

matrice triangulaire inférieure

Matrices

- Une **matrice diagonale d'ordre** n est une matrice carrée d'ordre n qui est simultanément triangulaire supérieure et triangulaire inférieure. C'est donc une matrice A carrée d'ordre n dont les termes non diagonaux sont nuls :

$$a_{ij} = 0 \text{ pour tout } i \neq j$$

On définit souvent une matrice diagonale en donnant la valeur de ses éléments diagonaux : $D = \mathbf{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ est la matrice diagonale d'ordre n dont les termes diagonaux vérifient $d_{i,i} = d_i$ (remarquez la double signification de **diag**).

$$\mathbf{diag}(1, 2, 3, 4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Contenu

Matrices

Opérations matricielles

- Opérations linéaires

- Produit matriciel

- Inverse d'une matrice

- Transposée d'une matrice

Noyau, image et rang d'une matrice

Matrices et applications linéaires

Déterminant d'une matrice carrée

Matrices

Définition

Soient $A = [a_{i,j}]$ et $B = [b_{i,j}]$ deux matrices de même format (m, n) . La matrice somme des matrices A et B est la matrice $S = [s_{i,j}]$ de format (m,n) telle que :

$$\forall i = 1, \dots, m \quad \forall j = 1, \dots, n, s_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

Si a est un nombre réel ou complexe, la matrice produit aA est la matrice $P = [p_{ij}]$ de format (m, n) telle que :

$$\forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n, p_{i,j} = a.a_{i,j}$$

Matrices

Proposition

Muni de ces deux opérations, $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ est un espace vectoriel sur K

Proposition - Base canonique de $\mathcal{M}_{m,n}(K)$

Pour $i = 1 \cdots m$ et $j = 1 \cdots n$, on définit dans $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ les matrices E_{ij} par :

$$(E_{ij})_{l,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq l \text{ ou } k \neq j \\ 1 & \text{si } i = l \text{ ou } k = j \end{cases}$$

Matrices

E_{ij} a la forme suivante :

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \overset{j}{0} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad i$$

Les $m \times n$ matrices E_{ij} forment une base de $\mathcal{M}_{m,n}(K)$.

Contenu

Matrices

Opérations matricielles

- Opérations linéaires

- Produit matriciel

- Inverse d'une matrice

- Transposée d'une matrice

Noyau, image et rang d'une matrice

Matrices et applications linéaires

Déterminant d'une matrice carrée

Matrices

Définition - Compatibilité pour le produit matriciel

Soient A et B deux matrices, on dit que A et B sont compatibles pour le produit AB de A par B , si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B .

Définition

Soient $A = [a_{i,j}]$ de format (m,p) et $B = [b_{l,k}]$ de format (p,n) deux matrices (sous ces hypothèses elles sont compatibles pour le produit AB). La matrice produit de la matrice A par la matrice B est une matrice $P = [p_{i,j}]$ de format (m,n) telle que :

$$\forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n, p_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}$$

$p_{i,j}$ est le résultat du produit de la ligne i de A par la colonne j de B .

Matrices

Proposition

Sous réserve de compatibilité, le produit matriciel est :

- associatif : $(A B)C=A(B C)$;
- distributif par rapport 'a la somme : $(A+B)C=AC+BC$ et $A(B+C)=AB+AC$.
- mais il **n'est pas commutatif**.

Matrices

Proposition - Expression des lignes et colonnes d'une matrice comme produit

Soit A une matrice de format (m, n) . On note E_j la matrice-colonne d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient de la j^{eme} ligne qui vaut 1. Alors :

$$AE_j = a_j \text{ (} j^{\text{eme}} \text{ colonne de } A \text{)}$$

De même, on note E'_i la matrice-ligne d'ordre m dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient de la i^{eme} colonne qui vaut 1. Alors :

$$E'_i A = a'_i \text{ (} i^{\text{eme}} \text{ colonne de } A \text{)}$$

Matrices

Proposition - Produit de matrices particulières

- Le produit de deux matrices carrées d'ordre n est une matrice carrée du même ordre.
- Le produit de deux matrices A et B triangulaires inférieures (resp. supérieures) d'ordre n , est une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure) d'ordre n ; les éléments diagonaux de la matrice produit AB sont égaux au produit des éléments diagonaux de rang homologue des matrices opérandes :

$$\text{pour tout } i, i = 1, \dots, n, (AB)_{i,i} = a_{i,i}b_{i,i}$$

- Le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale du même ordre : si $A = \mathbf{diag}(a_1, \dots, a_n)$ et si $B = \mathbf{diag}(b_1, \dots, b_n)$ alors $AB = \mathbf{diag}(a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_nb_n)$.

Matrices

Théorème - Produit matriciel par blocs

Soient A et B deux matrices compatibles pour le produit AB. Si A admet une partition en blocs A_{ik} de format (r_i, s_k) et si B admet une partition compatible en blocs B_{kj} de format (s_k, t_j) alors le produit AB peut se décomposer en blocs C_{ij} de format (r_i, t_j) et on a :

$$\forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, p, C_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj}$$

Contenu

Matrices

Opérations matricielles

- Opérations linéaires

- Produit matriciel

- Inverse d'une matrice

- Transposée d'une matrice

Noyau, image et rang d'une matrice

Matrices et applications linéaires

Déterminant d'une matrice carrée

Matrices

Définition - Matrice inversible

Une matrice A est inversible si et seulement s'il existe une matrice B et une matrice-unité I telles que $AB = BA = I$.

S'il en est ainsi, B est appelée inverse de A et est notée A^{-1} .

Matrices

Proposition

- Une **condition nécessaire** pour qu'une matrice A soit inversible est que A soit carrée.
- Soit A une matrice carrée inversible, son inverse A^{-1} est unique, et est une matrice carrée du même ordre, inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Une matrice carrée inversible A est **régulière** (i.e. $AB = AC \Rightarrow B = C$ et $BA = CA \Rightarrow B = C$); une matrice carrée non-inversible est dite **singulière**.
- Soient A et B deux matrices carrées inversibles de même ordre, alors la matrice produit AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Matrices

Proposition

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n telles que $AB = I_n$. Alors A et B sont inversibles et $A^{-1} = B$.

Pour montrer que A et B sont inversibles il suffit de montrer que $BA = I_n$:

- notons E_i la matrice-colonne d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne qui vaut 1 alors :
 - les matrices E_i forment une base de l'espace des matrices-colonne d'ordre n , $\mathcal{M}_{n,1}$;
 - d'autre part, si M_1, M_2, \dots, M_n désignent les colonnes d'une matrice carrée M d'ordre n on a pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, $M_i = ME_i$
 - enfin $AB = I_n \Rightarrow$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, $AB_i = E_i$

Matrices

Proposition (Suite 1)

- considérons les colonnes B_1, B_2, \dots, B_n de B comme des matrices-colonnes d'ordre n et montrons que la famille $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}$ et donc une base de $\mathcal{M}_{n,1}$:
 - soient c_1, c_2, \dots, c_n des éléments de K tels que $\sum_{i=1}^n c_i B_i = 0$
 - alors $A(\sum_{i=1}^n c_i B_i) = \sum_{i=1}^n c_i A B_i = \sum_{i=1}^n c_i E_i = 0$
 - puisque les matrices E_i forment une base de l'espace des matrices-colonnes d'ordre n , pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, $c_i = 0$
- pour tout $j = 1, 2, \dots, n$, on peut exprimer E_j dans cette base :
$$E_j = \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} B_k$$

Matrices

Proposition (Suite 2)

- la j^{eme} colonne de la matrice BA est égale au produit $(BA)E_j$:
$$(BA)E_j = BA\left(\sum_{k=1}^n \alpha_{jk} B_k\right) = \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} BAB_k = \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} BE_k$$
$$= \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} B_k = E_j$$

Matrices

Proposition - Inverse de matrices particulières

- Soit A une matrice diagonale d'ordre n , $A = \mathbf{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$;
 A est inversible si et seulement si tous ses éléments diagonaux sont différents de zéro. S'il en est ainsi,

$$A^{-1} = \mathbf{diag}\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}\right)$$

Matrices

Proposition - Inverse de matrices particulières

- Soit T une matrice **triangulaire supérieure** (resp. inférieure) d'ordre n , dont tous les **termes diagonaux** t_{ii} **sont différents de zéro**. Alors T est inversible et son inverse T^{-1} est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) d'ordre n et les termes diagonaux de la matrice inverse T^{-1} sont les inverses des termes diagonaux de rang homologue de T :

$$\text{pour tout } i = 1, \dots, n, (T^{-1})_{ii} = t_{ii}^{-1}$$

Une démonstration par récurrence du second résultat utilise les propriétés du produit par blocs appliqué aux matrices triangulaires décomposées sous la forme :

Matrices

$$T = \left[\begin{array}{c|c} t_{11} & t'_1 \\ \hline \mathbf{0} & \\ \vdots & \\ \mathbf{0} & T_1 \end{array} \right]$$

où $t'_1 = t_{12} \cdots t_{1n}$ est un vecteur-ligne de \mathbb{R}^{n-1} et T_1 une matrice triangulaire supérieure d'ordre $(n-1)$.

Contenu

Matrices

Opérations matricielles

- Opérations linéaires

- Produit matriciel

- Inverse d'une matrice

- Transposée d'une matrice

Noyau, image et rang d'une matrice

Matrices et applications linéaires

Déterminant d'une matrice carrée

Matrices

Définition

Soit $A = [a_{ij}]$ une matrice de format (m,n) , la transposée de A est la matrice de format (n,m) notée A^T ou A' telle que :

$$\forall i = 1, \dots, m \quad \forall j = 1, \dots, p, a'_{ij} = a_{ji}$$

Proposition

- pour tout a élément de K , $(aA)^T = aA^T$
- si A et B sont deux matrices de même format,
 $(A + B)^T = A^T + B^T$
- si A et B sont deux matrices compatibles pour le produit AB ,
 $(AB)^T = B^T A^T$
- enfin, si A est une matrice carrée inversible, A^T est inversible et
 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Matrices

On convient d'associer à tout vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de \mathbb{R}^n la matrice-colonne $[x]$ d'ordre n suivante :

$$[x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

dont le coefficient de la i^{eme} ligne est la i^{eme} coordonnée de x dans la base canonique \mathcal{E} de \mathbb{R}^n .

Théorème

L'application ϵ qui à $x \in \mathbb{R}^n$ associe la matrice-colonne $[x]_{\mathcal{E}} \in \mathcal{M}_{n,1}$ est une application linéaire bijective ; \mathbb{R}^n et $\mathcal{M}_{n,1}$ sont donc isomorphes.

Dans la suite on identifiera $\mathcal{M}_{n,1}$ et \mathbb{R}^n et on notera x la matrice-colonne associée au vecteur x .

Contenu

Matrices

Opérations matricielles

Noyau, image et rang d'une matrice

Définitions

Rang d'une matrice

Matrices et applications linéaires

Déterminant d'une matrice carrée

Matrices

Définition - Noyau et image d'une matrice

Soit A une matrice de format (m, n) , le noyau de A est l'ensemble

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } Ax = O\}$$

et l'image de A est l'ensemble :

$$R(A) = \{y \in \mathbb{R}^m \text{ t.q. } \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ et } Ax = y\}$$

Matrices

Proposition

- $N(A)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n ;
- $R(A)$ est le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^m engendré par les colonnes de A .

En effet soient $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ la famille des colonnes de A (considérées comme des vecteurs de \mathbb{R}^m). Soit $y \in R(A)$. Par définition, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = Ax$. Alors

$$y = Ax = \sum_{i=1}^n x_i a_i$$

Tout élément y de $R(A)$ est donc combinaison linéaire des colonnes de A . Réciproquement, toute combinaison linéaire de $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ est un élément de $R(A)$.

Contenu

Matrices

Opérations matricielles

Noyau, image et rang d'une matrice

Définitions

Rang d'une matrice

Matrices et applications linéaires

Déterminant d'une matrice carrée

Matrices

Définition

On appelle rang d'une matrice A , la dimension de l'image de A :

$$rg(A) = \dim R(A)$$

Proposition

Soit A une matrice carrée d'ordre n , alors :

$$rg(A) = n \iff A \text{ inversible}$$

La preuve est semblable à celle de la proposition Avec les mêmes notations, on a :

Matrices

- $\text{rg}(A)=n \iff$ la famille $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ des colonnes de A est une base de $\mathcal{M}_{n,1}$;
- alors pour tout $j = 1, \dots, n$, $E_j = b_{1,j}A_1 + b_{2,j}A_2 + \dots + b_{n,j}A_n = AB_j$ où B_j désigne la matrice-colonne d'ordre n :

$$B_j = \begin{bmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{bmatrix}$$

- on note B la matrice dont les colonnes sont : B_1, B_2, \dots, B_n ; alors la j^{eme} colonne de AB , $(AB)_j$, est égale à :

$$(AB)_j = (AB)E_j = A(BE_j) = AB_j = E_j$$

d'où $AB = I_n$; A est donc inversible.

Matrices

On rappelle le résultat fondamental suivant :

Théorème - Théorème du rang

Soit A une matrice de format (m, n) . Alors :

$$(nb.colonnesdeA) = dimR(A) + dimN(A) = rg(A) + dimN(A)$$

Contenu

Matrices

Opérations matricielles

Noyau, image et rang d'une matrice

Matrices et applications linéaires

- Application linéaire associée à une matrice

- Représentation matricielle des éléments de \mathbb{R}^n

- Représentation matricielle des applications linéaires

- Matrices semblables

Déterminant d'une matrice carrée

Matrices

Proposition

Soit A une matrice de format $m \times n$. L'application f_A de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m définie par :

$$f_A : x \in \mathbb{R}^n \rightarrow y \in \mathbb{R}^m \text{ tel que } [y] = A[x]$$

est une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m appelée application linéaire canonique associée à la matrice A .

Lorsqu'on identifie \mathbb{R}^n et l'espace des matrice-colonnes $\mathcal{M}_{n,1}$, la relation précédente s'écrit :

$$f_A : x \in \mathbb{R}^n \rightarrow y \in \mathbb{R}^m \text{ tel que } y = Ax$$

Matrices

Proposition

Soient A une matrice de format $m \times n$ et f_A l'application linéaire associée à

- $\text{Ker}(f_A) = N(A)$;
- $\text{Im}(f_A) = R(A)$;
- le rang de l'application linéaire f_A est égal au rang de la matrice A .

Contenu

Matrices

Opérations matricielles

Noyau, image et rang d'une matrice

Matrices et applications linéaires

- Application linéaire associée à une matrice

- Représentation matricielle des éléments de \mathbb{R}^n

- Représentation matricielle des applications linéaires

- Matrices semblables

Déterminant d'une matrice carrée

Matrices

\mathbb{R}^n peut être muni d'une autre base que la base canonique ; aussi on généralise les notions développées dans la section précédente au cas d'une base quelconque de \mathbb{R}^n .

Définition

Une base $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ de \mathbb{R}^n étant fixée, on représente dans cette base les éléments de \mathbb{R}^n par la matrice-colonne de leurs composantes suivant \mathcal{B} :

Si $x = \sum_{i=1}^n x_i b_i$, x est représenté par la matrice-colonne $[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Matrices

Proposition - Formule de changement de base

Supposons \mathbb{R}^n muni de deux bases $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ et $B' = \{b'_1, \dots, b'_n\}$.

On appelle matrice de passage de B à B' la matrice

$$P_{BB'} = [b'_1 b'_2 \cdots b'_n] \text{ où les } b'_i \text{ sont exprimés dans la base } B$$

alors

- $P_{BB'}$ est inversible
- $[x]_B = P_{BB'} [x]_{B'}$

On n'utilisera la notation $[]_B$ que lorsque on veut mettre en évidence l'usage de bases différentes.

Contenu

Matrices

Opérations matricielles

Noyau, image et rang d'une matrice

Matrices et applications linéaires

- Application linéaire associée à une matrice

- Représentation matricielle des éléments de \mathbb{R}^n

- Représentation matricielle des applications linéaires

- Matrices semblables

Déterminant d'une matrice carrée

Matrices

Définition - Matrice d'une application linéaire

Soit f une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m et supposons choisies une base $\mathcal{B}_n = \{b_1 \cdots b_n\}$ pour \mathbb{R}^n et une base \mathcal{B}_m pour \mathbb{R}^m .

On appelle matrice de f dans les bases \mathcal{B}_n et \mathcal{B}_m la matrice $[f]_{\mathcal{B}_n \mathcal{B}_m}$ de format (m,n) dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est formée des composantes de $f(b_j)$ exprimées dans la base \mathcal{B}_m :

$$[f]_{\mathcal{B}_n \mathcal{B}_m} = [[f(b_1)]_{\mathcal{B}_m} \cdots [f(b_n)]_{\mathcal{B}_m}]$$

Notation Si $m=n$ et si on muni \mathbb{R}^n d'une base unique \mathcal{B}_n , la matrice $[f]_{\mathcal{B}_n \mathcal{B}_n}$ est notée $[f]_{\mathcal{B}_n}$.

Lorsque \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m sont munis chacun de leur base canonique, on omet la mention de la base.

Matrices

Théorème

Soit f une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m . Alors si $y=f(x)$:

$$[y]_{\mathcal{B}_m} = [f]_{\mathcal{B}_n \mathcal{B}_m} [x]_{\mathcal{B}_n}$$

Proposition - Formule de changement de base pour les matrices

Supposons \mathbb{R}^m muni de deux bases \mathcal{B}_m et \mathcal{B}'_m , et soit $P_{\mathcal{B}_m \mathcal{B}'_m}$ la matrice de passage de \mathcal{B}_m à \mathcal{B}'_m . Supposons \mathbb{R}^n muni de deux bases \mathcal{B}_n et \mathcal{B}'_n et soit $P_{\mathcal{B}_n \mathcal{B}'_n}$ la matrice de passage de \mathcal{B}_n à \mathcal{B}'_n . Soit f une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m , alors les matrices de f vérifient la relation :

$$[f]_{\mathcal{B}'_n \mathcal{B}'_m} = P_{\mathcal{B}_m \mathcal{B}'_m}^{-1} [f]_{\mathcal{B}_n \mathcal{B}_m} P_{\mathcal{B}_n \mathcal{B}'_n}$$

Contenu

Matrices

Opérations matricielles

Noyau, image et rang d'une matrice

Matrices et applications linéaires

- Application linéaire associée à une matrice

- Représentation matricielle des éléments de \mathbb{R}^n

- Représentation matricielle des applications linéaires

- Matrices semblables

Déterminant d'une matrice carrée

Matrices

Définition - Matrices semblables

Deux matrices carrées A et B sont semblables si et seulement si il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$

Proposition

La relation “les matrices A et B sont semblables” est une relation d'équivalence de $\mathcal{M}_n(K)$.

Proposition

Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^n , si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases de \mathbb{R}^n , alors $[f]_{\mathcal{B}}$ et $[f]_{\mathcal{B}'}$ sont semblables.

Réciproquement si deux matrices carrées A et B sont semblables on peut interpréter A et B comme les matrices d'un même endomorphisme de \mathbb{R}^n exprimé dans deux bases différentes.

Contenu

Matrices

Opérations matricielles

Noyau, image et rang d'une matrice

Matrices et applications linéaires

Déterminant d'une matrice carrée

- Résultats fondamentaux

- Règles de calcul

- Déterminants et opérations matricielles

Matrices

On rappelle le théorème suivant :

Théorème

Soit A une matrice carrée d'ordre n . L'application de $(K^n)^n$ dans K qui aux colonnes de A fait correspondre le déterminant de A :

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \rightarrow \det(A)$$

est une forme n -linéaire alternée (i.e. linéaire par rapport à chacune des variables). Réciproquement, toute forme n -linéaire alternée de $(K^n)^n$ dans K est proportionnelle à cette application.

Contenu

Matrices

Opérations matricielles

Noyau, image et rang d'une matrice

Matrices et applications linéaires

Déterminant d'une matrice carrée

- Résultats fondamentaux

- Règles de calcul

- Déterminants et opérations matricielles

Matrices

Ces règles sont une conséquence du précédent théorème.

Proposition

- $\det(A)=0$ lorsque :
 - une colonne (ou une ligne) est nulle ;
 - deux colonnes de A sont liées ;
 - deux colonnes sont identiques.
- $\det(A)$ change de signe si on échange deux colonnes (deux lignes) ;
- $\det(A)$ ne change pas si on ajoute à une colonne (à une ligne) un multiple d'une autre colonne (d'une autre ligne) ;
- $\det(A)$ est multiplié par a si on multiplie une colonne (une ligne) par a ; en particulier $\det(aA) = a^n \det(A)$.

Matrices

Théorème

Soit A une matrice carrée d'ordre n , alors

$$A \text{ inversible} \iff \det(A) \neq 0$$

Contenu

Matrices

Opérations matricielles

Noyau, image et rang d'une matrice

Matrices et applications linéaires

Déterminant d'une matrice carrée

- Résultats fondamentaux

- Règles de calcul

- Déterminants et opérations matricielles

Matrices

Théorème

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n, alors

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Théorème

Soit A une matrice carrée inversible, alors

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Matrices

Théorème

Soit A une matrice carrée inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} [-1^{i+j} \det(\hat{A}_{ij})]_{i=1,n,j=1,n}^T$$

où \hat{A}_{ij} désigne la matrice carrée d'ordre $n-1$ appelée matrice mineure de a_{ij} et obtenue en supprimant dans A la ligne i et la colonne j .

Proposition

Soient A et $B = P^{-1}AP$ deux matrices semblables, c'est à dire telles qu'il existe une matrice inversible P telle que $B = PAP^{-1}$, alors

$$\det(A) = \det(B)$$

Matrices

Proposition

Soit A une matrice carrée d'ordre n , alors

$$\det(A) = \det(A^T)$$

Proposition

Soit A une matrice qui se décompose en quatre blocs sous la forme

$$\begin{pmatrix} A_1 & B \\ O & A_2 \end{pmatrix}$$

où A_1 et A_2 sont des blocs carrés, alors $\det(A) = \det(A_1)\det(A_2)$