Université Gaston Berger de Saint-Louis

Rappels de calcul matriciel

Pr. Ousmane THIARE

www.ousmanethiare.com

16 avril 2020

Contenu

Contenu

Matrices

Définition

Une matrice de format (m, n) à coefficients dans K est un tableau de $m \times n$ éléments de K organisés en m lignes et n colonnes. Chaque élément de la matrice est repéré par deux indices, le premier est l'indice de la ligne, le second est l'indice de la colonne.

$$
\begin{array}{cc}
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
 & & & & & \\
a_{i1} & a_{12} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\
 & & & & & \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix} & \textit{ligne } i \\
\textit{colonne } j &
\end{array}
$$

Matrices

Notation

- la matrice précédente est notée $A = [a_{i,j}]_{i=1,m;j=1,n}$;
- $a_{i,j}$ ou $(A)_{i,j}$ est le **terme**, l'**élément** ou encore le **coefficient** de la i^{eme} ligne et de la j^{eme} colonne de A ;
- une matrice de format (n, 1) est une **matrice-colonne** d'ordre n ;
- une matrice de format (1, n) est une **matrice-ligne** d'ordre n ;
- une matrice de format (n, n) est une **matrice carrée** d'ordre n ;
- la j^{eme} colonne de la matrice A est notée A_j ou a_i suivant qu'on la considère comme une matrice-colonne ou un vecteur de $\mathbb{R}^n$; réciproquement, la matrice dont les colonnes sont $a_1, a_2, \cdots, a_n$ sera notée $[a_1 a_2 \cdots a_n]$;
- la i^{eme} ligne de la matrice A est notée A_i' ou a_i' ;
- $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ désigne l'ensemble des matrices de format (m,n) à coefficients dans K et $\mathcal{M}_n(K)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n .

Matrices

Définition : Diagonale principale

La diagonale principale d'une matrice carrée $A = [a_{i,j}]_{i,j=1,n}$ est constituée des éléments de la forme $a_{i,i}$ appelés termes diagonaux de A. On notera **diag(A)** le vecteur de $\mathbb{R}^n$ formé des termes diagonaux de A : $diag(A) = (a_{1,1}, a_{2,2}, \cdots, a_{n,n})$.

La diagonale principale divise A en deux parties :

- la partie sur-diagonale formée des éléments $a_{i,j}$ tels que i < j (éléments sur-diagonaux) ;
- la partie sous-diagonale formée des éléments $a_{i,j}$ tels que i > j (éléments sous-diagonaux) ;

$$\begin{array}{c} termes \\ sous-diagonaux \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & \ddots & \\ & & \ddots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{array}{c} termes \\ sur-diagonaux \end{array}$$

Contenu

Matrices

- Une **matrice triangulaire** d'ordre n est une matrice A carrée d'ordre n dont tous les éléments sur-diagonaux ou sous-diagonaux sont nuls :
  - soit $a_{ij} = 0$ pour tous i et j tels que i $>$ j, la matrice est alors appelée **triangulaire supérieure**,
  - soit $a_{ij} = 0$ pour tous i et j tels que i $<$ j, la matrice est alors appelée **triangulaire inférieure**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

matrice triangulaire supérieure — matrice triangulaire inférieure

Matrices

- Une **matrice diagonale d'ordre** n est une matrice carrée d'ordre n qui est simultanément triangulaire supérieure et triangulaire inférieure. C'est donc une matrice A carrée d'ordre n dont les termes non diagonaux sont nuls :

$$a_{ij} = 0 \text{ pour tout } i \neq j$$

On définit souvent une matrice diagonale en donnant la valeur de ses éléments diagonaux : $D = \textbf{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ est la matrice diagonale d'ordre n dont les termes diagonaux vérifient $d_{i,i} = d_i$ (remarquez la double signification de **diag**).

$$\texttt{diag}(1,2,3,4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Contenu

Matrices

Définition

Soient $A = [a_{i,j}]$ et $B = [b_{i,j}]$ deux matrices de même format (m, n). La matrice somme des matrices A et B est la matrice $S = [s_{i,j}]$ de format (m,n) telle que :

$$\forall i = 1, \cdots, m \; \forall j = 1, \cdots, n, s_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

Si a est un nombre réel ou complexe, la matrice produit aA est la matrice $P = [p_{ij}]$ de format (m, n) telle que :

$$\forall i = 1, \cdots, m, \forall j = 1, \cdots, n, p_{i,j} = a.a_{i,j}$$

Matrices

Proposition

Muni de ces deux opérations, $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ est un espace vectoriel sur K

Proposition - Base canonique de $\mathcal{M}_{m,n}(K)$

Pour $i = i \cdots m$ et $j = 1 \cdots n$, on définit dans $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ les matrices E_{ij} par :

$$(E_{ij})_{l,k} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq l \text{ ou } k \neq j \\ 1 & \text{si} \quad i = l \text{ ou } k = j \end{cases}$$

Matrices

E_{ij} a la forme suivante :

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Les $m \times n$ matrices E_{ij} forment une base de $\mathcal{M}_{m,n}(K)$.

Contenu

Matrices

Définition - Compatibilité pour le produit matriciel

Soient A et B deux matrices, on dit que A et B sont compatibles pour le produit AB de A par B, si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Définition

Soient $A = [a_{i,j}]$ de format (m,p) et $B = [b_{l,k}]$ de format (p,n) deux matrices (sous ces hypothèses elles sont compatibles pour le produit AB). La matrice produit de la matrice A par la matrice B est une matrice $P = [p_{i,j}]$ de format (m,n) telle que :

$$\forall i = 1, \cdots, m, \forall j = 1, \cdots, n, p_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

$p_{i,j}$ est le résultat du produit de la ligne i de A par la colonne j de B.

Matrices

Proposition

Sous réserve de compatibilité, le produit matriciel est :

- associatif : (A B)C=A(B C) ;
- distributif par rapport 'a la somme : (A+B)C=AC+BC et A(B+C)=AB+AC.
- mais il **n'est pas commutatif**.

Matrices

Proposition - Expression des lignes et colonnes d'une matrice comme produit

Soit A une matrice de format (m, n). On note Ej la matrice-colonne d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient de la j^{eme} ligne qui vaut 1. Alors :

$$AE_j = a_j \ \ (j^{eme} colonne\ de\ A)$$

De même, on note E_i' la matrice-ligne d'ordre m dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient de la i^{eme} colonne qui vaut 1. Alors :

$$E_i' A = a_i' \ \ (i^{eme} colonne\ de\ A)$$

Matrices

Proposition - Produit de matrices particulières

- Le produit de deux matrices carrées d'ordre n est une matrice carrée du même ordre.
- Le produit de deux matrices A et B triangulaires inférieures (resp. supérieures) d'ordre n, est une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure) d'ordre n ; les éléments diagonaux de la matrice produit AB sont égaux au produit des éléments diagonaux de rang homologue des matrices opérandes :

$$pour\ tout\ i, i = 1, \cdots, n, (AB)_{i,i} = a_{i,i} b_{i,i}$$

- Le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale du même ordre : si $A = \mathbf{diag}(a_1, \cdots, a_n)$ et si $B = \mathbf{diag}(b_1, \cdots, b_n)$ alors $AB = \mathbf{diag}(a_1 b_1, a_2 b_2, \cdots, a_n b_n)$.

Matrices

Théorème - Produit matriciel par blocs

Soient A et B deux matrices compatibles pour le produit AB. Si A admet une partition en blocs A_{ik} de format (r_i, s_k) et si B admet une partition compatible en blocs B_{kj} de format (s_k, t_j) alors le produit AB peut se décomposer en blocs C_{ij} de format (r_i, t_j) et on a :

$$\forall i = 1, \cdots, m, \forall j = 1, \cdots, p, C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$

Contenu

Matrices

Définition - Matrice inversible

Une matrice A est inversible si et seulement s'il existe une matrice B et une matrice-unité I telles que AB = BA = I.
S'il en est ainsi, B est est appelée inverse de A et est notée A^{-1}.

Matrices

Proposition

- Une **condition nécessaire** pour qu'une matrice A soit inversible est que A soit carrée.
- Soit A une matrice carrée inversible, son inverse A^{-1} est unique, et est une matrice carrée du même ordre, inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Une matrice carrée inversible A est **régulière** (i.e. $AB = AC \Rightarrow B = C$ et $BA = CA \Rightarrow B = C$) ; une matrice carrée non-inversible est dite **singulière**.
- Soient A et B deux matrices carrées inversibles de même ordre, alors la matrice produit AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Matrices

Proposition

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n telles que $AB = I_n$. Alors A et B sont inversibles et $A^{-1} = B$.

Pour montrer que A et B sont inversibles il suffit de montrer que $BA = I_n$:

- notons E_i la matrice-colonne d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la i^{eme} ligne qui vaut 1 alors :
  - les matrices E_i forment une base de l'espace des matrices-colonne d'ordre n, $\mathcal{M}_{n,1}$;
  - d'autre part, si $M_1, M_2, \cdots, M_n$ désignent les colonnes d'une matrice carrée M d'ordre n on a pour tout $i = 1, 2, \cdots, n, M_i = ME_i$
  - enfin $AB = I_n \Rightarrow$ pour tout $i = 1, 2, \cdots, n, AB_i = E_i$

Matrices

Proposition (Suite 1)

- considérons les colonnes $B_1, B_2, \cdots, B_n$ de B comme des matrices-colonnes d'ordre n et montrons que la famille $\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}$ et donc une base de $\mathcal{M}_{n,1}$:
  - soient $c_1, c_2, \cdots, c_n$ des éléments de K tels que $\sum_{i=1}^n c_i B_i = 0$
  - alors $A(\sum_{i=1}^n c_i B_i) = \sum_{i=1}^n c_i A B_i = \sum_{i=1}^n c_i E_i = 0$
  - puisque les matrices E_i forment une base de l'espace des matrices-colonnes d'ordre n, pour tout $i = 1, 2, \cdots, n, c_i = 0$
- pour tout $j = 1, 2, \cdots, n$, on peut exprimer E_j dans cette base : $E_j = \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} B_k$

Matrices

Proposition (Suite 2)

- la j^{eme} colonne de la matrice BA est égale au produit $(BA)E_j$:
  $(BA)E_j = BA(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} B_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} BAB_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} BE_k$
  $= \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} B_k = E_j$

Matrices

Proposition - Inverse de matrices particulières

- Soit A une matrice diagonale d'ordre n, $A = \mathbf{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$; A est inversible si et seulement si tous ses éléments diagonaux sont différents de zéro. S'il en est ainsi,

$$A^{-1} = \mathbf{diag}(\frac{1}{a_i}, \frac{1}{a_i}, \cdots, \frac{1}{a_i})$$

Matrices

Proposition - Inverse de matrices particulières

- Soit T une matrice **triangulaire supérieure** (resp. inférieure) d'ordre n, dont tous les **termes diagonaux** t_{ii} **sont différents de zéro**. Alors T est inversible et son inverse T^{-1} est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) d'ordre n et les termes diagonaux de la matrice inverse T^{-1} sont les inverses des termes diagonaux de rang homologue de T :

$$\textit{pour tout } i = 1, \cdots, n, (T^{-1})_{ii} = t_{ii}^{-1}$$

Une démonstration par récurrence du second résultat utilise les propriétés du produit par blocs appliqué aux matrices triangulaires décomposées sous la forme :

Matrices

$$T = \left[\begin{array}{c|c} t_{11} & t'_1 \\ -- & -- \\ 0 & \\ \vdots & T_1 \\ 0 & \end{array}\right]$$

où $t'_1 = t_{12} \cdots t_{1n}$ est un vecteur-ligne de $\mathbb{R}^{n-1}$ et T_1 une matrice triangulaire supérieure d'ordre (n-1).

Contenu

Matrices

Définition

Soit $A = [a_{ij}]$ une matrice de format (m,n), la transposée de A est la matrice de format (n,m) notée A^T ou A' telle que :

$$\forall i = 1, \cdots, m \;\; \forall j = 1, \cdots, p, a'_{ij} = a_{ji}$$

Proposition

- pour tout a élément de K, $(aA)^T = aA^T$
- si A et B sont deux matrices de même format, $(A + B)^T = A^T + B^T$
- si A et B sont deux matrices compatibles pour le produit AB, $(AB)^T = B^T A^T$
- enfin, si A est une matrice carrée inversible, A^T est inversible et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Matrices

On convient d'associer a' tout vecteur $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ la matrice-colonne [x] d'ordre n suivante :

$$[x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

dont le coefficient de la i^{eme} ligne est la i^{eme} coordonnée de x dans la base canonique $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^n$.

Théorème

L'application ϵ qui a $x \in \mathbb{R}^n$ associe la matrice-colonne $[x]_{\mathcal{E}} \in \mathcal{M}_{n,1}$ est une application linéaire bijective ; $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}$ sont donc isomorphes.

Dans la suite on identifiera $\mathcal{M}_{n,1}$ et $\mathbb{R}^n$ et on notera x la matrice-colonne associée au vecteur x.

Contenu

Matrices

Définition - Noyau et image d'une matrice

Soit A une matrice de format (m, n), le noyau de A est l'ensemble

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \ t.q. \ Ax = O\}$$

et l'image de A est l'ensemble :

$$R(A) = \{y \in \mathbb{R}^m \ t.q. \ \exists x \in \mathbb{R}^m \ et \ Ax = y\}$$

Matrices

Proposition

- N(A) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$;
- R(A) est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ engendré par les colonnes de A.

En effet soient $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ la famille des colonnes de A (considérées comme des vecteurs de $\mathbb{R}^m$). Soit $y \in R(A)$. Par définition, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que y = Ax. Alors

$$y = Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$$

Tout élément y de R(A) est donc combinaison linéaire des colonnes de A. Réciproquement, toute combinaison linéaire de $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ est un élément de R(A).

Contenu

Matrices

Définition

On appelle rang d'une matrice A, la dimension de l'image de A :

$$rg(A) = dim\ R(A)$$

Proposition

Soit A une matrice carrée d'ordre n, alors :

$$rg(A) = n \Longleftrightarrow A\ inversible$$

La preuve est semblable à celle de la proposition Avec les mêmes notations, on a :

Matrices

- rg(A)=n $\Longleftrightarrow$ la famille $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ des colonnes de A est une base de $\mathcal{M}_{n,1}$;
- alors pour tout $j = 1, \cdots, n, E_j = b_{1,j}A_1 + b_{2,j}A_2 + \cdots + b_{n,j}A_n = AB_j$ où B_j désigne la matrice-colonne d'ordre n :

$$B_j = \begin{bmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{bmatrix}$$

- on note B le matrice dont les colonnes sont : $B_1, B_2, \cdots, B_n$; alors la j^{eme} colonne de AB, $(AB)_j$, est égale à :

$$(AB)_j = (AB)E_j = A(BE_j) = AB_j = E_j$$

d'où $AB = I_n$; A est donc inversible.

Matrices

On rappelle le résultat fondamental suivant :

Théorème - Théorème du rang

Soit A une matrice de format (m, n). Alors :

$$(nb.colonnesdeA) = dimR(A) + dimN(A) = rg(A) + dimN(A)$$

Contenu

Matrices

Proposition

Soit A une matrice de format $m \times n$. L'application f_A de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ définie par :

$$f_A : x \in \mathbb{R}^n \to y \in \mathbb{R}^m \textit{ tel que } [y] = A[x]$$

est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ appelée application linéaire canonique associée à la matrice A.
Lorsqu'on identifie $\mathbb{R}^n$ et l'espace des matrice-colonnes $\mathcal{M}_{n,1}$, la relation précédente s'écrit :

$$f_A : x \in \mathbb{R}^n \to y \in \mathbb{R}^m \textit{ tel que } y = Ax$$

Matrices

Proposition

Soient A une matrice de format $m \times n$ et f_A l'application linéaire associée à

- $Ker(f_A) = N(A)$;
- $Im(f_A) = R(A)$;
- le rang de l'application linéaire f_A est égal au rang de la matrice A.

Contenu

Matrices

$\mathbb{R}^n$ peut être muni d'une autre base que la base canonique ; aussi on généralise les notions développées dans la section précédente au cas d'une base quelconque de $\mathbb{R}^n$.

Définition

Une base $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots, b_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ étant fixée, on représente dans cette base les élément de $\mathbb{R}^n$ par la matrice-colonne de leurs composantes suivant $\mathcal{B}$:

Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$, x est représenté par la matrice-colonne $[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Matrices

Proposition - Formule de changement de base

Supposons $\mathbb{R}^n$ muni de deux base $B = \{b_1, \cdots, b_n\}$ et $B' = \{b'_1, \cdots, b'_n\}$.
On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [b'_1\, b'_2 \cdots b'_n] \text{ où } \textit{les } b'_i \textit{ sont exprims dans la base } \mathcal{B}$$

alors

- $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ est inversible
- $[x]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[x]_{\mathcal{B}'}$

On n'utilisera la notation $[\;]_{\mathcal{B}}$ que lorsque on veut mettre en évidence l'usage de bases différentes.

Contenu

Matrices

Définition - Matrice d'une application linéaire

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ et supposons choisies une base $\mathcal{B}_n = \{b_1 \cdots b_n\}$ pour $\mathbb{R}^n$ et une base $\mathcal{B}_m$ pour $\mathbb{R}^m$.
On appelle matrice de f dans les base $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{B}_m$ la matrice $[f]_{\mathcal{B}_n\mathcal{B}_m}$ de format (m,n) dont la j^{eme} colonne est formée des composantes de $f(b_j)$ exprimées dans la base $\mathcal{B}_m$:

$$[f]_{\mathcal{B}_n\mathcal{B}_m} = [[f(b_1)]_{\mathcal{B}_m} \cdots [f(b_n)]_{\mathcal{B}_m}]$$

Notation Si m=n et si on muni $\mathbb{R}^n$ d'une base unique $\mathcal{B}_n$, la matrice $[f]_{\mathcal{B}_n\mathcal{B}_n}$ est notée $[f]_{\mathcal{B}_n}$.
Lorsque $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ sont munis chacun de leur base canonique, on omet la mention de la base.

Matrices

Théorème

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Alors si y=f(x) :

$$[y]_{\mathcal{B}_m} = [f]_{\mathcal{B}_n\mathcal{B}_m}[x]_{\mathcal{B}_n}$$

Proposition - Formule de changement de base pour les matrices

Supposons $\mathbb{R}^m$ muni de deux bases $\mathcal{B}_m$ et $\mathcal{B}'_m$, et soit $P_{\mathcal{B}_m\mathcal{B}'_m}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_m$ à $\mathcal{B}'_m$. Supposons $\mathbb{R}^n$ muni de deux bases $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{B}'_n$ et soit $P_{\mathcal{B}_n\mathcal{B}'_n}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_n$ à $\mathcal{B}'_n$. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, alors les matrices de f vérifient la relation :

$$[f]_{\mathcal{B}'_n\mathcal{B}'_m} = P^{-1}_{\mathcal{B}_m\mathcal{B}'_m}[f]_{\mathcal{B}'_n\mathcal{B}'_m}P_{\mathcal{B}_n\mathcal{B}'_n}$$

Contenu

Matrices

Définition - Matrices semblables

Deux matrices carrées A et B sont semblables si et seulement si il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$

Proposition

La relation "les matrices A et B sont semblables" est une relation d'équivalence de $\mathcal{M}_n(K)$.

Proposition

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de $\mathbb{R}^n$, alors $[f]_{\mathcal{B}}$ et $[f]_{\mathcal{B}'}$ sont semblables.
Réciproquement si deux matrices carrées A et B sont semblables on peut interpréter A et B comme les matrices d'un même endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ exprimé dans deux bases différentes.

Contenu

Matrices

On rappelle le théor'eme suivant :

Théorème

Soit A une matrice carrée d'ordre n. L'application de $(K^n)^n$ dans K qui aux colonnes de A fait correspondre le déterminant de A :

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \to det(A)$$

est une forme n-linéaire alternée (i.e. linéaire par rapport à chacune des variables). Réciproquement, toute forme n-linéaire alternée de $(K^n)^n$ dans K est proportionnelle à cette application.

Contenu

Matrices

Ces règles sont une conséquence du précédent théorème.

Proposition

- det(A)=0 lorsque :
  - une colonne (ou une ligne) est nulle ;
  - deux colonnes de A sont liées ;
  - deux colonnes sont identiques.
- det(A) change de signe si on échange deux colonnes (deux lignes) ;
- det(A) ne change pas si on ajoute à une colonne (à une ligne) un multiple d'une autre colonne (d'une autre ligne) ;
- det(A) est multiplié par a si on multiplie une colonne (une ligne) par a ; en particulier $det(aA) = a^n det(A)$.

Matrices

Théorème

Soit A une matrice carrée d'ordre n, alors

$$A \text{ inversible} \Longleftrightarrow det(A) \neq 0$$

Contenu

Matrices

Théorème

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n, alors

$$det(AB) = det(A)det(B)$$

Théorème

Soit A une matrice carrée inversible, alors

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

Matrices

Théorème

Soit A une matrice carrée inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}[-1^{i+j}det(\hat{A}_{ij})]^{T}_{i=1,n,j=1,n}$$

où $\hat{A}_{ij}$ désigne la matrice carrée d'ordre n-1 appelée matrice mineure de a_{ij} et obtenue en supprimant dans A la ligne i et la colonne j.

Proposition

Soient A et $B = P^{-1}AP$ deux matrices semblables, c'est à dire telles qu'il existe une matrice inversible P telle que $B = PAP^{-1}$, alors

$$det(A) = det(B)$$

Matrices

Proposition

Soit A une matrice carrée d'ordre n, alors

$$det(A) = det(A^T)$$

Proposition

Soit A une matrice qui se décompose en quatre blocs sous la forme

$$\begin{pmatrix} A_1 & B \\ O & A_2 \end{pmatrix}$$

où A_1 et A_2 sont des blocs carrés, alors $det(A) = det(A_1)det(A_2)$