



# Université Gaston Berger de Saint-Louis

## Résolution numérique de systèmes linéaires Généralités

**Pr. Ousmane THIARE**

[www.ousmanethiare.com](http://www.ousmanethiare.com)

May 10, 2024

# Contenu

---

## Généralités

- Rappels sur les matrices

- Réduction des matrices

- Algorithme, complexité

- Systèmes linéaires, définitions

- Norme de vecteurs et de matrices

- Conditionnement

- Notion de préconditionnement

# Contenu

---

## Généralités

- Rappels sur les matrices

- Réduction des matrices

- Algorithme, complexité

- Systèmes linéaires, définitions

- Norme de vecteurs et de matrices

- Conditionnement

- Notion de préconditionnement

# Généralités

## Définitions

Une matrice  $(m, n)$  est un tableau à  $m$  lignes et  $n$  colonnes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

C'est aussi la matrice d'une application linéaire  $\mathcal{A}$  de  $K^n$  dans  $K^m$  où  $K$  est  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ : une base  $e_1, \dots, e_n$  étant choisie dans  $K^n$ , et une base  $f_1, \dots, f_m$  dans  $K^m$ ,  $\mathcal{A}$  est défini par

$$1 \leq j \leq n, \mathcal{A}(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i$$

# Généralités

---

## Définition 1.1

L'application linéaire  $\mathcal{A}$  est injective si

$$\mathcal{A}(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

## Définition 1.2

L'application linéaire  $\mathcal{A}$  est surjective si pour tout  $b$  dans  $K^m$ , on peut trouver  $x$  dans  $K^n$  tel que  $\mathcal{A}(x) = b$

## Définition 1.3

L'application linéaire  $\mathcal{A}$  est bijective si elle est à la fois injective et surjective.

Si  $\mathcal{A}$  est bijective, on a  $m=n$ , la matrice  $A$  est carrée.

# Généralités

---

## Opérations sur les matrices

1. Somme: On peut ajouter deux matrices de même dimension  $(m, n)$  et  $(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$
2. Produit par un scalaire : Pour  $\alpha$  dans  $K$ , on peut faire le produit  $\alpha A$  et  $(\alpha A)_{ij} = \alpha(A)_{ij}$
3. Produit de 2 matrices : Pour  $A(m, n)$  et  $B(n, p)$  on peut faire le produit  $AB$ , de dimension  $(m, p)$  et  $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n (A)_{ik}(B)_{kj}$
4. Transposée d'une matrice : Pour  $A(m, n)$ , la transposée de  $A$  est de dimension  $(n, m)$  et est définie par  $({}^t A)_{ij} = A_{ji}$

# Généralités

---

## Opérations sur les matrices

1. Adjointe d'une matrice : Pour  $A(m, n)$  l'adjointe de  $A$  est de dimension  $(n, m)$  et est définie par  $(A^*)_{ij} = \bar{A}_{ji}$ .
2. Inverse d'une matrice carrée : on dit que la matrice carrée  $A$  est inversible si il existe une matrice  $B$  telle que  $AB=BA=I$ . La matrice  $B$  est appelée l'inverse de  $A$  et notée  $A^{-1}$ .

# Généralités

## Cas particulier de matrices

Toutes les matrices considérées dans ce paragraphe sont carrées.

1. Matrices symétriques : elles vérifient  ${}^tA = A$ , ou encore  $a_{ij} = a_{ji}$ .
2. Matrices hermitiennes : elles vérifient  $A^* = A$ , ou encore  $\bar{a}_{ij} = a_{ji}$ .
3. Matrices diagonales : elles vérifient  $a_{ij} = 0$  pour  $i \neq j$ .
4. Matrices triangulaires inférieures : elles vérifient  $a_{ij} = 0$  pour  $j > i$ , i.e. elles ont la forme

$$A = \begin{pmatrix} \times & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \times & \times & 0 & \cdots & 0 \\ \times & \times & \ddots & 0 & 0 \\ \times & \times & \cdots & \times & 0 \\ \times & \times & \cdots & \times & \times \end{pmatrix}$$

# Généralités

## Cas particulier de matrices

1. Matrices triangulaires supérieures : elles vérifient  $a_{ij} = 0$  pour  $j < i$ , i.e. elles ont la forme

$$A = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \cdots & \times \\ 0 & \times & \times & \cdots & \times \\ 0 & 0 & \ddots & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \times \end{pmatrix}$$

Les matrices triangulaires sont importantes pour la résolution numérique des systèmes car elles ont les propriétés suivantes :

- La transposée d'une matrice triangulaire inférieure est triangulaire supérieure et réciproquement ;

# Généralités

---

- Le produit de deux matrices triangulaires inférieures est triangulaire inférieure et le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure.
- L'inverse d'une matrice triangulaire inférieure est triangulaire inférieure et l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure est triangulaire supérieure.

# Généralités

---

## Déterminants

Le déterminant d'une **matrice carrée**  $A$  se note  $\det A$ , où

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

# Généralités

---

## Déterminants

Il obéit à la règle de calcul de développement par rapport à une ligne ou une colonne et a les propriétés suivantes

1.  $\det I = 1$ ,
2.  $\det {}^t A = \det A$ ,
3.  $\det A^* = \overline{\det A}$ ,
4. pour tout scalaire (complexe ou réel)  $\alpha$ ,  $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$ ,
5.  $\det AB = \det A \times \det B$ ,
6. Si  $A$  est inversible,  $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ ,
7. Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux.

# Généralités

## Produit de matrices par blocs

On décompose la matrice carrée  $A$  de la façon suivante :

$$A = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{a}_{11} & \cdots & \mathbf{a}_{1J} & \mathbf{a}_{1,J+1} & \cdots & \mathbf{a}_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a}_{I1} & \cdots & \mathbf{a}_{IJ} & \mathbf{a}_{I,J+1} & \cdots & \mathbf{a}_{In} \\ \hline \mathbf{a}_{I+11} & \cdots & \mathbf{a}_{I+1J} & \mathbf{a}_{I+1,J+1} & \cdots & \mathbf{a}_{I+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a}_{n1} & \cdots & \mathbf{a}_{nJ} & \mathbf{a}_{n,J+1} & \cdots & \mathbf{a}_{nn} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} A_{(I,J)}^{11} & A_{(I,n-J)}^{21} \\ A_{(n-I,J)}^{12} & A_{(n-I,n-J)}^{22} \end{pmatrix}$$

La matrice

$$A_{(I,J)}^{11} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \cdots & \mathbf{a}_{1J} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a}_{I1} & \cdots & \mathbf{a}_{IJ} \end{pmatrix}$$

est de dimension  $(I,J)$

# Généralités

---

## Produit de matrices par blocs

$$A_{(I,n-J)}^{21} = \begin{pmatrix} a_{1J+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{IJ+1} & \cdots & a_{In} \end{pmatrix}$$

est de dimension  $(I, n-J)$

$$A_{(n-I,J)}^{12} = \begin{pmatrix} a_{I+11} & \cdots & a_{I+1J} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nJ} \end{pmatrix}$$

est de dimension  $(n-I, J)$

# Généralités

---

## Produit de matrices par blocs

$$A_{(n-I, n-J)}^{21} = \begin{pmatrix} a_{I+1, J+1} & \cdots & a_{I+1, n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n, J+1} & \cdots & a_{n, n} \end{pmatrix}$$

est de dimension  $(n-I, n-J)$  Si l'on prend une matrice  $B$  partitionnée de la façon suivante :

$$B = \begin{pmatrix} B_{(J, K)}^{11} & B_{(J, n-K)}^{21} \\ B_{(n-J, K)}^{12} & B_{(n-J, n-K)}^{22} \end{pmatrix}$$

# Généralités

---

## Produit de matrices par blocs

alors on peut faire le produit  $AB$  comme si l'on avait affaire à des matrices  $2 \times 2$ :

$$AB = \begin{pmatrix} A^{11}B^{11} + A^{12}B^{21} & A^{11}B^{12} + A^{12}B^{22} \\ A^{21}B^{11} + A^{22}B^{21} & A^{21}B^{12} + A^{22}B^{22} \end{pmatrix}$$

# Contenu

---

## Généralités

- Rappels sur les matrices

- Réduction des matrices

- Algorithme, complexité

- Systèmes linéaires, définitions

- Norme de vecteurs et de matrices

- Conditionnement

- Notion de préconditionnement

## Généralités

---

Soit  $A$  une matrice carrée  $n \times n$ , on dit que  $\lambda$  est valeur propre si il existe un  $x \neq 0$  tel que  $Ax = \lambda x$ . On dit alors que  $x$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$ . Les valeurs propres sont les zéros du polynôme caractéristique  $p(x) = \det(A - \lambda I)$ . L'espace propre associé à la valeur propre  $\lambda$  est  $E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I)$ . On appelle multiplicité de la valeur propre  $\lambda$  sa multiplicité en tant que zéro de  $p$ . On dit que  $A$  est diagonalisable si il existe une base  $(f_1, \dots, f_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  constituée de vecteurs propres de  $A$  associés aux valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  (comptées sans la multiplicité). On a alors pour tout  $i$   $Af_i = \lambda_i f_i$ . On pourra écrire matriciellement  $A = P\Lambda P^{-1}$  où  $\Lambda$  est la matrice diagonale des valeurs propres de  $A$ , et  $P$  la matrice des vecteurs propres.

# Généralités

---

## Théorème 1.1

La matrice  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  (resp. sur  $\mathbb{C}$ ) si et seulement si

- ses valeurs propres sont dans  $\mathbb{R}$  (resp. sur  $\mathbb{C}$ ),
- pour chaque valeur propre la dimension du sous-espace propre est égale à la multiplicité.

## Corollaire 1.1

Une matrice dont toutes les valeurs propres sont simples est diagonalisable.

## Théorème 1.2

Une matrice symétrique est diagonalisable en base orthonormée.

# Généralités

---

## Théorème 1.3 (Théorème de Schur)

Pour toute matrice carrée  $A$ , il existe une matrice unitaire  $U$  telle que  $U^*AU$  est triangulaire. Si de plus  $A$  est normale, il existe une matrice unitaire  $U$  telle que  $U^*AU$  est diagonale.

# Contenu

---

## Généralités

- Rappels sur les matrices
- Réduction des matrices
- Algorithme, complexité
- Systèmes linéaires, définitions
- Norme de vecteurs et de matrices
- Conditionnement
- Notion de préconditionnement

## Généralités

---

Qu'est-ce qu'un algorithme? C'est une suite d'opérations élémentaires nécessaires pour réaliser une tâche donnée. Qu'est-ce qu'une opération élémentaire ? Dans l'algorithme d'Euclide par exemple pour trouver le pgcd de 2 polynômes  $a$  et  $b$ , une opération élémentaire est la division euclidienne :

$$a = bq_0 + r_0, r_0 = 0 \text{ ou } d^\circ r_0 < d^\circ a,$$

$$b = r_0q_1 + r_1, r_1 = 0 \text{ ou } d^\circ r_1 < d^\circ r_0$$

$$r_0 = r_1q_2 + r_2, r_2 = 0 \text{ ou } d^\circ r_2 < d^\circ r_1$$

on a alors  $a \wedge b = b \wedge r_0 = \dots = r_{n-1} \wedge r_n$  tant que  $r_n \neq 0$ . La suite des  $d^\circ r_k$  est une suite d'entiers strictement décroissante, il existe donc un  $n$  tel que  $r_{n+1} = 0$ . On a alors  $a \wedge b = r_n$ . C'est la forme que l'on a apprise à l'école.

## Généralités

---

On peut écrire l'algorithme sous la forme

$$d_1 = d^\circ a; d_2 = d^\circ b;$$

si  $d_1 < d_2, p_1 = b \ \& \ p_2 = a;$

sinon  $p_1 = a \ \& \ p_2 = b;$

tant que  $p_2 \neq 0,$

$$p_1 = q * p_2 + r$$

si  $r = 0, \text{pgcd} = p_2$

sinon  $p_1 = p_2; p_2 = r$

et on normalise.

## Généralités

---

Les opérations élémentaires sont  $+$ ,  $-$ ,  $\star$ ,  $/$ . La complexité d'un algorithme est le nombre d'opérations élémentaires nécessaires à la résolution de l'algorithme. Prenons l'exemple du produit de deux matrices. Soit  $A$  une matrice  $m \times n$ ,  $B$  une matrice  $n \times p$ . Pour calculer le produit  $AB$  on a l'algorithme avec des boucles

Données  $A, B$

Initialisation  $C = \text{zeros}(m, p)$  ;

Pour  $i=1 : m$  ;

    Pour  $j=1 : p$  ;

        Pour  $k = 1 : n$  ;

$C(i, j) = C(i, j) + A(i, k) \star B(k, j)$  ;

        Fin ;

    Fin ;

Fin ;

## Généralités

---

Pour calculer chaque  $C(i,j)$  on a  $n$  multiplications et  $n-1$  additions. Ce qui fait  $nmp$  multiplications et  $(n-1)mp$  additions. Pour des matrices carrées, on obtient en tout,  $(2n - 1)n^2$ .

# Contenu

---

## Généralités

- Rappels sur les matrices

- Réduction des matrices

- Algorithme, complexité

- Systèmes linéaires, définitions

- Norme de vecteurs et de matrices

- Conditionnement

- Notion de préconditionnement

## Généralités

---

Résoudre un système linéaire de  $n$  équations à  $m$  inconnues, c'est trouver  $m$  nombres, réels ou complexes,  $x_1, \dots, x_m$ , tels que

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases} \quad (1.1)$$

Les données sont les coefficients  $a_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq m$  et  $b_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ . On appelle système homogène associé le système obtenu pour  $b = (0, \dots, 0)$ . Il est équivalent de se donner la matrice  $A$  des coefficients  $a_{ij}$  et le vecteur  $b$  des  $b_j$  :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

# Généralités

---

et de chercher un vecteur

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

tel que

$$Ax = b$$

Il sera souvent utile d'écrire (1.1) sous la forme

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + x_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

## Généralités

---

Soit, en notant  $a^{(j)}$ , le  $j$ -ème vecteur colonne de  $A$

$$a^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} :$$

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \cdots + x_m a^m = b$$

On en déduit un premier résultat : le système (1.1) admet une solution si et seulement si  $b$  appartient au sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  engendré par les  $m$  vecteurs colonnes de  $A$  :  $\mathcal{L}(a^{(1)}, \dots, a^{(m)})$ . On appelle rang du système le rang de la matrice  $A$ , c'est la dimension de  $\mathcal{L}(a^{(1)}, \dots, a^{(m)})$ . C'est aussi la taille d'un mineur de  $A$  d'ordre maximum non nul.

# Généralités

---

- On s'intéresse d'abord aux systèmes carrés, tels que  $m=n$ .

## Théorème 1.4

Supposons  $m=n$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $A$  est inversible,
- $\det(A) \neq 0$ ,
- pour tout  $b$  dans  $\mathbb{R}^n$ , le système (1.1) admet une solution et une seule,
- le système homogène associé n'admet que la solution triviale  $x = (0, \dots, 0)$ .

Remarquons que si  $A$  n'est pas inversible, son noyau est de dimension  $n-r$  d'après le théorème du rang. Soit  $b$  est dans  $\text{Im } A$ , il existe une solution  $X$ , et toutes les solutions sont obtenues en ajoutant à  $X$  un élément de  $\text{Ker } A$ .

# Généralités

---

Si  $b$  n'est pas dans  $\text{Im } A$ , l'ensemble des solutions est vide.

Remarquons qu'il n'est pas forcément évident de savoir si  $A$  est inversible, cela vient en général avec l'étude de la méthode numérique dont le système est issu.

## Généralités

---

- Supposons maintenant que  $r = n < m$ . Il y a plus d'inconnues que d'équations : le système est sous-déterminé. Supposons, par un changement de numérotation, que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

soit non nul. On dit que  $x_1, \dots, x_n$  sont les inconnues principales,  $x_{r+1}, \dots, x_m$  sont les inconnues non principales. On réécrit le système sous la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 - (a_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{1m}x_m) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 - (a_{2r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{2m}x_m) \\ \vdots & \dots \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n - (a_{nr+1}x_{r+1} + \cdots + a_{nm}x_m) \end{cases}$$

## Généralités

---

- Supposons maintenant que  $r = n < m$ . Il y a plus d'inconnues que d'équations : le système est sous-déterminé. Supposons, par un changement de numérotation, que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

soit non nul. On dit que  $x_1, \dots, x_n$  sont les inconnues principales,  $x_{r+1}, \dots, x_n$  sont les inconnues non principales. On réécrit le système sous la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 - (a_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{1m}x_m) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 - (a_{2r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{2m}x_m) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n - (a_{nr+1}x_{r+1} + \cdots + a_{nm}x_m) \end{cases}$$

## Généralités

---

Pour un second membre donné  $b$ , pour chaque choix de  $x_{r+1}, \dots, x_n$  dans  $\mathbb{R}^{n-r}$ , il y a une seule solution  $x_1, \dots, x_r$ . L'ensemble des solutions est un espace affine de dimension  $n-r$ . On dira qu'il y a une indétermination d'ordre  $n-r$ .

- Cas où  $r < n$ . Alors on ne peut pas avoir une solution pour tout second membre  $b$ , puisque  $\mathcal{L}(a^{(1)}, \dots, a^{(m)}) \subsetneq \mathbb{R}^n$ . On a alors  $r$  équations principales, supposons que ce soient les  $r$  premières. Nous raisonnons maintenant sur les vecteurs lignes. Notons  $l^{(i)}$  les vecteurs lignes de  $A$ . Le système se récrit

$$\begin{cases} l^{(1)} \cdot x & = & b_1 \\ l^{(2)} \cdot x & = & b_2 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ l^{(r)} \cdot x & = & b_r \\ l^{(r+1)} \cdot x & = & b_{r+1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ l^{(n)} \cdot x & = & b_n \end{cases}$$

## Généralités

---

$(I^{(1)}, \dots, I^{(r)})$  forment un système libre. Le système constitué des  $r$  premières équations relève donc de l'analyse 2. On peut alors exprimer  $I^{(r+1)}, \dots, I^{(n)}$  en fonction de  $(I^{(1)}, \dots, I^{(r)})$  :

$$I^{(j)} = \lambda_{j1} I^{(1)} + \dots + \lambda_{jr} I^{(r)}$$

Si l'on fait une combinaison linéaire des  $r$  premières lignes avec les coefficients  $\lambda_{jk}$ , on obtient

$$I^{(j)}.x = \lambda_{j1} b_1 + \dots + \lambda_{jr} b_r$$

d'une part, et  $b_j$  d'après le système. On a donc le

## Généralités

---

### Théorème 1.5

Supposons que les  $r$  premières lignes  $(l^{(1)}, \dots, l^{(r)})$  sont indépendantes, et que les autres lignes vérifient

$$l^{(j)} = \lambda_{j1}l^{(1)} + \dots + \lambda_{jr}l^{(r)}, r + 1 \leq j \leq n \quad (1.3)$$

Alors toute solution du système principal (système des  $r$  premières équations) est solution de (1.1) si et seulement si

$$b_j = \lambda_{j1}b_1 + \dots + \lambda_{jr}b_r, r + 1 \leq j \leq n \quad (1.4)$$

(1.4) constituent les conditions de compatibilité. Si elles ne sont pas satisfaites, le système est impossible. Si elles sont satisfaites, il y a une indétermination d'ordre  $m-r$  comme en 2.

# Contenu

---

## Généralités

- Rappels sur les matrices

- Réduction des matrices

- Algorithme, complexité

- Systèmes linéaires, définitions

- Norme de vecteurs et de matrices

- Conditionnement

- Notion de préconditionnement

# Généralités

---

## Définition 1.4

Une **norme** sur un espace vectoriel  $V$  est une application  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$  qui vérifie les propriétés suivantes

- $\|v\| = 0 \iff v = 0$
- $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall v \in V$
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \forall (u, v) \in V^2$  (Inégalité triangulaire)

Une norme sur  $V$  est également appelée **norme vectorielle**. On appelle **espace vectoriel normé** un espace vectoriel muni d'une norme.

## Généralités

---

Les trois normes suivantes sont les plus couramment utilisées sur  $\mathbb{C}^n$  :

$$\|v\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|$$

$$\|v\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n |v_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|v\|_\infty = \max_i |v_i|$$

La deuxième norme est la norme euclidienne sur  $\mathbb{C}^n$ . Elle dérive du produit scalaire  $(u, v)_2 = \sum_{i=1}^n u_i \bar{v}_i$

## Généralités

---

### Théorème 1.6

Soit  $V$  un espace de dimension finie. Pour tout nombre réel  $p \geq 1$ , l'application  $v \mapsto \|v\|_p$  définie par

$$\|v\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

est une norme.

### Rappel 1.1

Pour  $p > 1$  et  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , l'**inégalité de Holder** s'écrit:

$$\|uv\|_1 = \sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leq \left( \sum_{i=1}^n |u_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n |v_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \|u\|_p \|v\|_q$$

## Généralités

---

### Définition 1.5

Deux normes  $\| \cdot \|$  et  $\| \cdot \|'$ , définies sur un même espace vectoriel  $V$ , sont **équivalentes** s'ils existent deux constantes  $C$  et  $C'$  telles que

$$\|v\|' \leq C\|v\| \text{ et } \|v\| \leq C'\|v\|'$$

### Rappel 1.2

Sur un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

## Généralités

### Définition 1.6

Soit  $\mathcal{M}_n$  l'anneau des matrices d'ordre  $n$ , à éléments dans le corps  $\mathbb{K}$ . Une norme matricielle est une application  $\|\cdot\| : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant

1.  $\|\mathbb{A}\| = 0 \iff \mathbb{A} = 0$
2.  $\|\alpha\mathbb{A}\| = |\alpha|\|\mathbb{A}\|, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$
3.  $\|\mathbb{A} + \mathbb{B}\| \leq \|\mathbb{A}\| + \|\mathbb{B}\|, \forall (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n^2$  (Inégalité triangulaire)
4.  $\|\mathbb{A}\mathbb{B}\| \leq \|\mathbb{A}\|\|\mathbb{B}\|, \forall (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n^2$

### Rappel 1.3

Etant donné une norme vectorielle  $\|\cdot\|$  sur  $\mathbb{K}^n$ , l'application  $\|\cdot\| : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par

$$\|\mathbb{A}\| = \sup_{\substack{v \in \mathbb{K}^n \\ v \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}v\|}{\|v\|} = \sup_{\substack{v \in \mathbb{K}^n \\ v < 1}} \|\mathbb{A}v\| = \sup_{v=1} \|\mathbb{A}v\|$$

## Généralités

---

est une norme matricielle, appelée **norme matricielle subordonnée** (à la norme vectorielle donnée).

De plus

$$\|Av\| \leq \|A\| \|v\|, \forall v \in \mathbb{K}^n$$

et la norme  $\|A\|$  peut se définir aussi par

$$\|A\| = \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : \|Av\| \leq \alpha \|v\|, \forall v \in \mathbb{K}^n \}$$

Il existe au moins un vecteur  $u$  tel que

$$u \neq 0 \text{ et } \|Au\| = \|A\| \|u\|$$

Enfin une norme subordonnée vérifie toujours

$$\|I\| = 1$$

# Généralités

## Théorème 1.7

Soit  $\|A\| = (a_{ij})$  une matrice carrée. Alors

$$\|A\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{v \in \mathbb{C}^n \\ v \neq 0}} \frac{\|Av\|_1}{\|v\|_1}$$

$$\|A\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{v \in \mathbb{C}^n \\ v \neq 0}} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(AA^*)} = \|A^*\|_2$$

$$\|A\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{v \in \mathbb{C}^n \\ v \neq 0}} \frac{\|Av\|_\infty}{\|v\|_\infty} = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

La norme  $\|\cdot\|_2$  est invariante par transformation unitaire :

$$UU^* = I \Rightarrow \|A\|_2 = \|AU\|_2 = \|UA\|_2 = \|U^*AU\|_2$$

# Généralités

---

Par ailleurs, si la matrice  $A$  est normale :

$$AA^* = A^*A \Rightarrow \|A\|_2 = \rho(A)$$

## Remarque 1.1

1. Si une matrice  $A$  est hermitienne, ou symétrique (donc normale), on a  $\|A\|_2 = \rho(A)$
2. Si une matrice  $A$  est unitaire ou orthogonale (donc normale), on a  $\|A\|_2 = 1$

# Généralités

---

## Théorème 1.8

1. Si une matrice  $\mathbb{A}$  une matrice carrée quelconque et  $\|\cdot\|$  une norme matricielle subordonnée ou non, quelconque. Alors

$$\rho(\mathbb{A}) \leq \|\mathbb{A}\|_2$$

2. Etant donné une matrice  $\mathbb{A}$  et un nombre  $\epsilon > 0$ , il existe au moins une norme matricielle subordonnée telle que

$$\|\mathbb{A}\|_2 \leq \rho(\mathbb{A}) + \epsilon.$$

## Généralités

### Théorème 1.9

L'application  $\|\cdot\|_E : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par

$$\|\mathbb{A}\|_E = \left( \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\text{tr}(\mathbb{A}^* \mathbb{A})}$$

pour toute matrice  $\mathbb{A} = (a_{ij})$  d'ordre  $n$ , est une norme matricielle non subordonnée (pour  $n \geq 2$ ), invariante par transformation unitaire :

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{I} \Rightarrow \|\mathbb{A}\|_E = \|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_E = \|\mathbb{U}\mathbb{A}\|_E = \|\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U}\|_E$$

et qui vérifie

$$\|\mathbb{A}\|_2 \leq \|\mathbb{A}\|_E \leq \sqrt{n} \|\mathbb{A}\|_2, \forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n.$$

# Généralités

---

De plus  $\|\mathbb{I}\|_E = \sqrt{n}$

# Contenu

---

## Généralités

- Rappels sur les matrices

- Réduction des matrices

- Algorithme, complexité

- Systèmes linéaires, définitions

- Norme de vecteurs et de matrices

- Conditionnement

- Notion de préconditionnement

# Généralités

## Erreur d'arrondi

Un nombre réel s'écrit de façon unique  $x = \pm a10^b$ , où  $a$  est la mantisse,  $b$  l'exposant, entier.  $a$  est un nombre réel tel que  $0.1 \leq a < 1$ . L'arrondi de  $x$  à  $l$  termes est noté  $arr_l(x) = \bar{x}$  et est égal à  $\pm \bar{a}10^b$ , avec  $\bar{a} = \underbrace{0.\dots}_l$ ,

par exemple  $\pi = 3.141592653\dots$  s'écrit  $\pi = 0.\underbrace{31415926}_{8}53\dots 10^1$ ,

et avec  $l=8$ , on a  $\bar{\pi} = 0.\underbrace{31415927}_{8} 10^1$ .

## Généralités

### Définition 1.7

La précision de l'ordinateur est le plus petit  $\epsilon$  tel que  $arr_l(1+\epsilon) > 1$ .

$$x = 0.\underbrace{10 \dots 0}_l 49 \dots 10^1, arr_l(x) = 1$$

$$x = 0.\underbrace{10 \dots 0}_l 50 \dots 10^1, arr_l(x) = 0.\underbrace{10 \dots 0}_l 110^1 > 1$$

On en déduit que  $\epsilon = 510^{-l}$ . Si l'on calcule en base 2, on aura  $2^{-l}$ .

On a pour tout  $x \neq 0$ ,  $\left| \frac{x - arr_l(x)}{x} \right| < \epsilon$ . En effet

$$\frac{x - arr_l(x)}{x} = \frac{(a - \bar{a})10^b}{a10^b} = \frac{(a - \bar{a})}{a} \leq \frac{510^{-l-1}}{10^{-1}} = 510^{-l} = \epsilon$$

On peut écrire aussi  $arr_l(x) = x(1 + \epsilon)$ , avec  $|\epsilon| < \epsilon$ .

# Généralités

---

## Conditionnement d'un problème

Soit  $P$  un problème, c'est-à-dire une application de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}$ . Par exemple le produit de 2 nombres s'écrit

$$(x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2.$$

Le conditionnement de  $P$  mesure l'influence d'une perturbation de  $x$  sur la solution du problème  $P(x)$  :

### Définition 1.8

La condition  $\mathcal{K}$  de  $P$  est le plus petit nombre tel que

$$\left| \frac{x - \hat{x}}{x} \right| < eps \Rightarrow \left| \frac{P(x) - P(\hat{x})}{P(x)} \right| < \mathcal{K}.eps$$

# Généralités

---

## Définition 1.8 (suite)

Si  $\mathcal{K}$  est grand, le problème est mal conditionné, si  $\mathcal{K}$  n'est pas trop grand, le problème est bien conditionné.

## Exemple 1.1

produit de 2 nombres. Soient  $\hat{x}_i = (1 + \epsilon_i)x_i$ , et  $\epsilon = \max(|\epsilon_i|)$ .

$$\frac{x_1x_2 - \hat{x}_1\hat{x}_2}{x_1x_2} = (1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2) - 1 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_2,$$

d'où

$$\left| \frac{x_1x_2 - \hat{x}_1\hat{x}_2}{x_1x_2} \right| \leq \epsilon^2 + 2\epsilon$$

Comme  $\epsilon^2$  est négligeable devant  $\epsilon$ , on a  $\mathcal{K} \approx 2$

# Généralités

---

## Conditionnement d'une matrice

On veut estimer  $x-y$ , où  $x$  est solution du système linéaire, et  $y$  solution du système perturbé

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$(\mathbb{A} + \Delta\mathbb{A})\mathbf{y} = (\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b})$$

# Généralités

---

Exemple de R.S. Wilson :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8,1 & 7,2 \\ 7,08 & 5,04 & 6 & 5 \\ 8 & 5,98 & 9,89 & 9 \\ 6,99 & 4,99 & 9 & 9,98 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 32,01 \\ 22,99 \\ 33,01 \\ 30,99 \end{pmatrix},$$

$$\Delta\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,1 & 0,2 \\ 0,08 & 0,04 & 0 & 0 \\ 0 & -0,02 & -0,11 & 0 \\ -0,01 & -0,01 & 0 & -0,02 \end{pmatrix}, \quad \Delta\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0,01 \\ -0,01 \\ 0,01 \\ -0,01 \end{pmatrix}.$$

# Généralités

---

Exemple de R.S. Wilson (suite) :

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \iff \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Au} = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b} \iff \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1,82 \\ -0,36 \\ 1,35 \\ 0,79 \end{pmatrix}, \implies \Delta\mathbf{x} = \mathbf{u} - \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0,82 \\ -1,36 \\ 0,35 \\ -0,21 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{b} \iff \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -81 \\ 137 \\ -34 \\ 22 \end{pmatrix}, \implies \Delta\mathbf{x} = \mathbf{v} - \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -82 \\ 136 \\ -35 \\ 21 \end{pmatrix}$$

# Généralités

---

## Définition 1.9

Soit  $\|\cdot\|$  une norme matricielle subordonnée, le **conditionnement** d'une matrice régulière  $\mathbb{A}$ , associé à cette norme, est le nombre

$$\text{cond}(\mathbb{A}) = \|\mathbb{A}\| \|\mathbb{A}^{-1}\|$$

Nous noterons  $\text{cond}_p(\mathbb{A}) = \|\mathbb{A}\|_p \|\mathbb{A}^{-1}\|_p$

## Théorème 1.10

Soit  $\mathbb{A}$  une matrice inversible. Soient  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$  les solutions respectives de

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ et } \mathbb{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = (\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b})$$

## Généralités

---

### Théorème 1.10 (suite)

Supposons  $\mathbf{b} \neq 0$ , alors l'inégalité

$$\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \text{cond}(\mathbb{A}) \frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

est satisfaite, et c'est la meilleure possible : pour une matrice  $\mathbb{A}$  donnée, on peut trouver des vecteurs  $\mathbf{b} \neq 0$  et  $\Delta \mathbf{x} \neq 0$  tels qu'elle devienne une égalité.

## Généralités

---

### Preuve

Soit  $\mathbb{A}$  une matrice inversible. Soient  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$  les solutions respectives de

$$\mathbb{A}\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{b}$$

d'où

$$\|\Delta\mathbf{x}\| \leq \|\mathbb{A}^{-1}\| \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \|\mathbf{b}\| \leq \|\mathbb{A}^{-1}\| \|\mathbb{A}\| \|\mathbf{x}\| \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

## Généralités

---

### Théorème 1.11

Soit  $\mathbb{A}$  une matrice inversible. Soient  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$  les solutions respectives de

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ et } (\mathbb{A} + \Delta\mathbb{A})(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

Supposons  $\mathbf{b} \neq 0$ , alors l'inégalité

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}\|} \leq \text{cond}(\mathbb{A}) \frac{\|\Delta\mathbb{A}\|}{\|\mathbb{A}\|}$$

est satisfaite, et c'est la meilleure possible : pour une matrice  $\mathbb{A}$  donnée, on peut trouver un vecteur  $\mathbf{b} \neq 0$  et une matrice  $\Delta\mathbb{A} \neq 0$  tels qu'elle devienne une égalité.

# Généralités

---

## Théorème 1.12

- Pour toute une matrice inversible  $\mathbb{A}$ ,

$$\text{cond}(\mathbb{A}) \geq 1,$$

$$\text{cond}(\mathbb{A}) = \text{cond}(\mathbb{A}^{-1}),$$

$$\text{cond}(\alpha\mathbb{A}) = \text{cond}(\mathbb{A}), \text{ pour } \alpha, \text{ tout scalaire } \alpha \neq 0$$

- Pour toute matrice inversible  $\mathbb{A}$ ,

$$\text{cond}_2(\mathbb{A}) = \frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}}$$

où  $\mu_{\max}$  et  $\mu_{\min}$  sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur singulière de  $\mathbb{A}$ .

## Généralités

---

### Théorème 1.12 (suite)

- Si  $\mathbb{A}$  est une matrice normale,

$$\text{cond}_2(\mathbb{A}) = \frac{\max_i |\lambda_i(\mathbb{A})|}{\min_i |\lambda_i(\mathbb{A})|}$$

où les  $\lambda_i(\mathbb{A})$  sont les valeurs propres de  $A$ .

- Le conditionnement  $\text{cond}_2(\mathbb{A})$  d'une matrice unitaire ou orthogonale vaut 1.
- Le conditionnement  $\text{cond}_2(\mathbb{A})$  est invariant par transformation unitaire

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{I} \Rightarrow \text{cond}_2(\mathbb{A}) = \text{cond}_2(\mathbb{A}\mathbb{U}) = \text{cond}_2(\mathbb{U}\mathbb{A}) = \text{cond}_2(\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U})$$

# Généralités

---

## Rappel 1.4

Les valeurs singulières d'une matrice rectangulaire  $A$  sont les racines carrées positives des valeurs propres de  $A^*A$ .

# Contenu

---

## Généralités

- Rappels sur les matrices

- Réduction des matrices

- Algorithme, complexité

- Systèmes linéaires, définitions

- Norme de vecteurs et de matrices

- Conditionnement

- Notion de préconditionnement

## Généralités

---

Lorsque l'on veut résoudre un système linéaire  $Ax=b$  avec une matrice mal conditionnée, il peut être intéressant de multiplier à gauche par une matrice  $C$  telle  $CA$  soit mieux conditionnée. L'exemple le plus simple est le *préconditionnement diagonal*, où la matrice  $C$  est la matrice diagonale constituée des inverses des éléments diagonaux de  $A$ .