Université Gaston Berger de Saint-Louis

Résolution numérique de systèmes linéaires
Généralités

Pr. Ousmane THIARE

www.ousmanethiare.com

April 16, 2020

Contenu

Contenu

Généralités

Définitions

Une matrice (m, n) est un tableau à m lignes et n colonnes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

C'est aussi la matrice d'une application linéaire $\mathcal{A}$ de K^n dans K^m où K est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: une base $e_1, \cdots, e_n$ étant choisie dans K^n, et une base $f_1, \cdots, f_m$ dans K^m, $\mathcal{A}$ est défini par

$$1 \leq j \leq n, \mathcal{A}(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i$$

Généralités

Définition 1.1

L'application linéaire $\mathcal{A}$ est injective si

$$\mathcal{A}(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

Définition 1.2

L'application linéaire $\mathcal{A}$ est surjective si pour tout b dans K^m, on peut trouver x dans K^n tel que $\mathcal{A}(x) = b$

Définition 1.3

L'application linéaire $\mathcal{A}$ est bijective si elle est à la fois injective et surjective.
Si $\mathcal{A}$ est bijective , on a m=n, la matrice A est carrée.

Généralités

Opérations sur les matrices

1. Somme: On peut ajouter deux matrices de même dimension (m, n) et $(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$
2. Produit par un scalaire : Pour α dans K, on peut faire le produit αA et $(\alpha A)_{ij} = \alpha (A)_{ij}$
3. Produit de 2 matrices : Pour A(m, n) et B(n, p) on peut faire le produit AB, de dimension(m, p) et $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik} (B)_{kj}$
4. Transposée d'une matrice : Pour A(m, n), la transposée de A est de dimension (n,m) et est définie par $({}^{t}A)_{ij} = A_{ji}$

Généralités

Opérations sur les matrices

1. Adjointe d'une matrice : Pour A(m, n) l'adjointe de A est de dimension(n, m) et est définie par $(A^{\star})_{ij} = \bar{A}_{ji}$.
2. Inverse d'une matrice carrée : on dit que la matrice carrée A est inversible si il existe une matrice B telle que AB=BA=I. La matrice B est appelée l'inverse de A et notée A^{-1}.

Généralités

Cas particulier de matrices

Toutes les matrice considérées dans ce paragraphe sont carrées.

1. Matrices symétriques : elles vérifient ${}^tA = A$, ou encore $a_{ij} = a_{ji}$.
2. Matrices hermitiennes : elles vérifient $A^\star = A$, ou encore $\bar{a}_{ij} = a_{ji}$.
3. Matrices diagonales : elles vérifient $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.
4. Matrices triangulaires inférieures : elles vérifient $a_{ij} = 0$ pour $j > i$, i.e. elles ont la forme

$$A = \begin{pmatrix} \times & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \times & \times & 0 & \cdots & 0 \\ \times & \times & \ddots & 0 & 0 \\ \times & \times & \cdots & \times & 0 \\ \times & \times & \cdots & \times & \times \end{pmatrix}$$

Généralités

Cas particulier de matrices

1. Matrices triangulaires supérieures : elles vérifient $a_{ij} = 0$ pour $j < i$, i.e. elles ont la forme

$$A = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \cdots & \times \\ 0 & \times & \times & \cdots & \times \\ 0 & 0 & \ddots & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \times \end{pmatrix}$$

Les matrices triangulaires sont importantes pour la résolution numérique des systèmes car elles ont les propriétés suivantes :

- La transposée d'une matrice triangulaire inférieure est triangulaire supérieure et réciproquement ;

Généralités

- Le produit de deux matrices triangulaires inférieures est triangulaire inférieure et le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure.
- L'inverse d'une matrice triangulaire inférieure est triangulaire inférieure et l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure est triangulaire supérieure.

Généralités

Déterminants

Le déterminant d'une **matrice carrée** A se note det A, où

$$det\,A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Généralités

Déterminants

Il obéit à la règle de calcul de développement par rapport à une ligne ou une colonne et a les propriétés suivantes

1. det I$=$1,
2. $det\ {}^tA = det\ A$,
3. $det\ A^\star = \overline{det\ A}$,
4. pour tout scalaire (complexe ou réel) α, $det(\alpha A) = \alpha^n det\ A$,
5. $det\ AB = det\ A \times det\ B$,
6. Si A est inversible, $det\ A^{-1} = \frac{1}{det\ A}$,
7. Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux.

Généralités

Produit de matrices par blocs

On décompose la matrice carrée A de la façon suivante :

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1J} & a_{1J+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{I1} & \cdots & a_{IJ} & a_{IJ+1} & \cdots & a_{In} \\ \hline a_{I+11} & \cdots & a_{I+1J} & a_{I+1J+1} & \cdots & a_{I+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nJ} & a_{nJ+1} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A^{11}_{(I,J)} & A^{21}_{(I,n-J)} \\ A^{12}_{(n-I,J)} & A^{22}_{(n-I,n-J)} \end{pmatrix}$$

La matrice

$$A^{11}_{(I,J)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1J} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{I1} & \cdots & a_{IJ} \end{pmatrix}$$

est de dimension (I,J)

Généralités

Produit de matrices par blocs

$$A^{21}_{(I,n-J)} = \begin{pmatrix} a_{1J+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{IJ+1} & \cdots & a_{In} \end{pmatrix}$$

est de dimension (I,n-J)

$$A^{12}_{(n-I,J)} = \begin{pmatrix} a_{I+11} & \cdots & a_{I+1J} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nJ} \end{pmatrix}$$

est de dimension (n-I,J)

Généralités

Produit de matrices par blocs

$$A^{21}_{(n-I,n-J)} = \begin{pmatrix} a_{I+1J+1} & \cdots & a_{I+1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nJ+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

est de dimension (n-I,n-J) Si l'on prend une matrice B partitionnée de la façon suivante :

$$B = \begin{pmatrix} B^{11}_{(J,K)} & B^{21}_{(J,n-K)} \\ B^{12}_{(n-J,K)} & B^{22}_{(n-J,n-K)} \end{pmatrix}$$

Généralités

Produit de matrices par blocs

alors on peut faire le produit AB comme si l'on avait affaire à des matrices 2×2:

$$AB = \begin{pmatrix} A^{11}B^{11} + A^{12}B^{21} & A^{11}B^{12} + A^{12}B^{22} \\ A^{21}B^{11} + A^{22}B^{21} & A^{21}B^{12} + A^{22}B^{22} \end{pmatrix}$$

Contenu

Généralités

Soit A une matrice carrée $n \times n$, on dit que λ est valeur propre si il existe un $x \neq 0$ tel que $Ax = \lambda x$. On dit alors que x est un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Les valeurs propres sont les zéros du polynôme caractéristique $p(x) = det(A - \lambda I)$. L'espace propre associé à la valeur propre λ est $E_\lambda = Ker(A - \lambda I)$. On appelle multiplicité de la valeur propre λ sa multiplicité en tant que zéro de p. On dit que A est diagonalisable si il existe une base $(f_1, \cdots, f_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A associés au valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ (comptées sans la multiplicité). On a alors pour tout i $Af_i = \lambda_i f_i$. On pourra écrire matriciellement $A = P \Lambda P^{-1}$ où Λ est la matrice diagonale des valeurs propres de A, et P la matrice des vecteurs propres.

Généralités

Théorème 1.1

La matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{C}$) si et seulement si

- ses valeurs propres sont dans $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{C}$),
- pour chaque valeur propre la dimension du sous-espace propre est égale à la multiplicité.

Corollaire 1.1

Une matrice dont toutes les valeurs propres sont simples est diagonalisable.

Théorème 1.2

Une matrice symétrique est diagonalisable en base orthonormée.

Généralités

Théorème 1.3 (Théorème de Schur)

Pour toute matrice carrée A, il existe une matrice unitaire U telle que $U^{\star}AU$ est triangulaire. Si de plus A est normale, il existe une matrice une matrice unitaire U telle que $U^{\star}AU$ est diagonale.

Contenu

Généralités

Qu'est-ce qu'un algorithme? C'est une suite d'opérations élémentaires nécessaires pour réaliser une tâche donnée. Qu'est-ce qu'une opération élémentaire ? Dans l'algorithme d'Euclide par exemple pour trouver le pgcd de 2 polynômes a et b, une opération élémentaire est la division euclidienne :

$$a = bq_0 + r_0, r_0 = 0 \text{ ou } d^\circ r_0 < d^\circ a,$$

$$b = r_0 q_1 + r_1, r_1 = 0 \text{ ou } d^\circ r_1 < d^\circ r_0$$

$$r_0 = r_1 q_2 + r_2, r_2 = 0 \text{ ou } d^\circ r_2 < d^\circ r_1$$

on a alors $a \wedge b = b \wedge r_0 = \cdots = r_{n-1} \wedge r_n$ tant que $r_n \neq 0$. La suite des $d^\circ r_k$ est une suite d'entiers strictement décroissante, il existe donc un n tel que $r_{n+1} = 0$. On a alors $a \wedge b = r_n$. C'est la forme que l'on a apprise à l'école.

Généralités

On peut écrire l'algorithme sous la forme
$d_1 = d^\circ a; d_2 = d^\circ b;$
si $d_1 < d_2, p_1 = b \,\& p_2 = a;$
sinon $p_1 = a \,\& p_2 = b;$
tant que $p_2 \neq 0,$
$p_1 = q \star p_2 + r$
si $r = 0, pgcd = p_2$
sinon $p_1 = p_2; p_2 = r$
et on normalise.

Généralités

Les opérations élémentaires sont $+$, -, $\star$, $/$. La complexité d'un algorithme est le nombre d'opérations élémentaires nécessaires à la résolution de l'algorithme. Prenons l'exemple du produit de deux matrices. Soit A une matrice $m \times n$, B une matrice $n \times p$. Pour calculer le produit AB on a l'algorithme avec des boucles

```
Données A,B
Initialisation C=zeros(m, p) ;
Pour i=1 : m ;
        Pour j=1 : p ;
                Pour k = 1 : n ;
                        C(i,j) = C(i,j) + A(i,k) * B(k,j) ;
                Fin ;
        Fin ;
Fin ;
```

Généralités

Pour calculer chaque C(i,j) on a n multiplications et n-1 additions. Ce qui fait nmp multiplications et (n-1)mp additions. Pour des matrices carrées, on obtient en tout, $(2n-1)n^2$.

Contenu

Généralités

Résoudre un système linéaire de n équations à m inconnues, c'est trouver m nombres, réels ou complexes, $x_1, \cdots, x_m$, tels que

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}\right. \tag{1.1}$$

Les données sont les coefficients $a_{ij}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ et $b_j, 1 \leq j \leq n$. On appelle système homogène associé le système obtenu pour $b = (0, \cdots, 0)$. Il est équivalent de se donner la matrice A des coefficients a_{ij} et le vecteur b des b_j :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Généralités

et de chercher un vecteur

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

tel que

$$Ax = b$$

Il sera souvent utile d'écrire (1.1) sous la forme

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + x_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (1.2)$$

Généralités

Soit, en notant $a^{(j)}$, le j-ème vecteur colonne de A

$$a^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \cdots x_m a^m = b$$

On en déduit un premier résultat : le système (1.1) admet une solution si et seulement si b appartient au sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les m vecteurs colonnes de A : $\mathcal{L}(a^{(1)}, \cdots, a^{(m)})$. On appelle rang du système le rang de la matrice A, c'est la dimension de $\mathcal{L}(a^{(1)}, \cdots, a^{(m)})$. C'est aussi la taille d'un mineur de A d'ordre maximum non nul.

Généralités

- On s'intéresse d'abord aux systèmes carrés, tels que m=n.

Théorème 1.4

Supposons m=n. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- A est inversible,
- $det(A) \neq 0$,
- pour tout b dans $\mathbb{R}^n$, le système (1.1) admet une solution et une seule,
- le système homogène associé n'admet que la solution triviale $x = (0, \cdots, 0)$.

Remarquons que si A n'est pas inversible, son noyau est de dimension n-r d'après le théorème du rang. Soit b est dans Im A, il existe une solution X, et toutes les solutions sont obtenues en ajoutant à X un élément de Ker A.

Généralités

Si b n'est pas dans Im A, l'ensemble des solutions est vide. Remarquons qu'il n'est pas forcément évident de savoir si A est inversible, cela vient en général avec l'étude de la méthode numérique dont le système est issu.

Généralités

- Supposons maintenant que $r = n < m$. Il y a plus d'inconnues que d'équations : le système est sous-déterminé. Supposons, par un changement de numérotation, que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

soit non nul. On dit que $x_1, \cdots, x_n$ sont les inconnues principales, $x_{r+1}, \cdots, x_m$ sont les inconnues non principales. On réécrit le système sous la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 - (a_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{1m}x_m) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 - (a_{2r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{2m}x_m) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n - (a_{nr+1}x_{r+1} + \cdots + a_{nm}x_m) \end{cases}$$

Généralités

- Supposons maintenant que $r = n < m$. Il y a plus d'inconnues que d'équations : le système est sous-déterminé. Supposons, par un changement de numérotation, que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

soit non nul. On dit que $x_1, \cdots, x_n$ sont les inconnues principales, $x_{r+1}, \cdots, x_n$ sont les inconnues non principales. On réécrit le système sous la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 - (a_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{1m}x_m) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 - (a_{2r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{2m}x_m) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n - (a_{nr+1}x_{r+1} + \cdots + a_{nm}x_m) \end{cases}$$

Généralités

Pour un second membre donné b, pour chaque choix de $x_{r+1}, \cdots, x_n$ dans $\mathbb{R}^{n-r}$, il y a une seule solution $x_1, \cdots, x_r$. L'ensemble des solutions est un espace affine de dimension n-r. On dira qu'il y a une indétermination d'ordre m-n.

- Cas où $r < n$. Alors on ne peut pas avoir une solution pour tout second membre b, puisque $\mathcal{L}(a^{(1)}, \cdots, a^{(m)}) \subsetneq \mathbb{R}^n$. On a alors r équations principales, supposons que ce soient les r premières. Nous raisonnons maintenant sur les vecteurs lignes. Notons $l^{(i)}$ les vecteurs lignes de A. Le système se récrit

$$\left\{ \begin{array}{lcl} l^{(1)} \cdot x & = & b_1 \\ l^{(2)} \cdot x & = & b_2 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ l^{(r)} \cdot x & = & b_r \\ l^{(r+1)} \cdot x & = & b_{r+1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ l^{(n)} \cdot x & = & b_n \end{array} \right.$$

Généralités

$(l^{(1)}, \cdots, l^{(r)})$ forment un système libre. Le système constitué des r premières équations relèvent donc de l'analyse 2. On peut alors exprimer $l^{(r+1)}, \cdots, l^{(n)}$ en fonction de $(l^{(1)}, \cdots, l^{(r)})$:

$$l^{(j)} = \lambda_{j1} l^{(1)} + \cdots + \lambda_{jr} l^{(r)}$$

Si l'on fait une combinaison linéaire des r premières lignes avec les coefficients λ_{jk}, on obtient

$$l^{(j)}.x = \lambda_{j1} b_1 + \cdots + \lambda_{jr} b_r$$

d'une part, et b_j d'après le système. On a donc le

Généralités

Théorème 1.5

Suppososns que les r premières lignes $(l^{(1)}, \cdots, l^{(r)})$ sont indépendantes, et que les autres lignes vérifient

$$l^{(j)} = \lambda_{j1} l^{(1)} + \cdots \lambda_{jr} l^{(r)}, r + 1 \leq j \leq n \qquad (1.3)$$

Alors toute solution du système principal (système des r premières équations) est solution de (1.1) si et seulement si

$$b_j = \lambda_{j1} b_1 + \cdots \lambda_{jr} b_r, r + 1 \leq j \leq n \qquad (1.4)$$

(1.4) constituent les conditions de compatibilité. Si elles ne sont pas satisfaites, le système est impossible. Si elles sont satisfaites, il y a une indétermination d'ordre m-r comme en 2.

Contenu

Généralités

Définition 1.4

Une **norme** sur un espace vectoriel V est une application $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés suivantes

- $\|v\| = 0 \iff v = 0$
- $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall v \in V$
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \forall (u, v) \in V^2$ (Inégalité triangulaire)

Une norme sur V est également appelée **norme vectorielle**. On appelle **espace vectoriel normé** un espace vectoriel muni d'une norme.

Généralités

Les trois normes suivantes sont les plus couramment utilisées sur $\mathbb{C}^n$:

$$
\begin{aligned}
\|v\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |v_i| \\
\|v\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
\|v\|_\infty &= \max_i (v_i)
\end{aligned}
$$

La deuxième norme est la norme euclidienne sur $\mathbb{C}^n$. Elle dérive du produit scalaire $(u, v)_2 = \sum_{i=1}^{n} u_i \bar{v}_i$

Généralités

Théorème 1.6

Soit V un espace de dimension finie. Pour tout nombre réel $p \geq 1$, l'application $v \mapsto \|v\|_p$ définie par

$$\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

est une norme.

Rappel 1.1

Pour $p > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, l'**inégalité de Holder** s'écrit:

$$\|uv\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |u_i v_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \|u\|_p \|v\|_q$$

Généralités

Définition 1.5

Deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|$', définies sur un même espace vectoriel V, sont **équivalentes** s'ils existent deux constantes C et C' telles que

$$\|v\|' \leq C\|v\| \text{ et } \|v\| \leq C'\|v\|'$$

Rappel 1.2

Sur un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

Généralités

Définition 1.6

Soit $\mathcal{M}_n$ l'anneau des matrices d'ordre n, à éléments dans le corps $\mathbb{K}$. Une norme matricielle est une application $\|\cdot\| : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}^+$ vérifiant

1. $\|\mathbb{A}\| = 0 \Longleftrightarrow \mathbb{A} = 0$
2. $\|\alpha\mathbb{A}\| = |\alpha|\|\mathbb{A}\|, \forall\alpha \in \mathbb{K}, \forall\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$
3. $\|\mathbb{A}+\mathbb{B}\| \leq \|\mathbb{A}\| + \|\mathbb{B}\|, \forall(\mathbb{A},\mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n^2$ (Inégalité triangulaire)
4. $\|\mathbb{A}\mathbb{B}\| \leq \|\mathbb{A}\|\|\mathbb{B}\|, \forall(\mathbb{A},\mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n^2$

Rappel 1.3

Etant donné une norme vectorielle $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{K}^n$., l'application$\|\cdot\| : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$\|\mathbb{A}\| = \sup_{\substack{v\in\mathbb{K}^n \\ v\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}v\|}{\|v\|} = \sup_{\substack{v\in\mathbb{K}^n \\ v\leq 1}} \|\mathbb{A}v\| = \sup_{\substack{v\in\mathbb{K}^n \\ v=1}} \|\mathbb{A}v\|$$

Généralités

est une norme matricielle, appelée **norme matricielle subordonnée** (à la norme vectorielle donnée).
De plus

$$\|\mathbb{A}v\| \leq \|\mathbb{A}\|\|v\|, \forall v \in \mathbb{K}^n$$

et la norme $\|\mathbb{A}\|$ peut se définir aussi par

$$\|\mathbb{A}\| = inf\{\alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}v\| \leq \alpha\|v\|, \forall v \in \mathbb{K}^n\}$$

Il existe au moins un vecteur u tel que

$$u \neq 0 \text{ et } \|\mathbb{A}u\| = \|\mathbb{A}\|\|u\|$$

Enfin une norme subordonnée vérifie toujours

$$\|\mathbb{I}\| = 1$$

Généralités

Théorème 1.7

Soit $\|A\| = (a_{ij})$ une matrice carrée. Alors

$$\|\mathbb{A}\|_1 \overset{\text{def}}{=} \sup_{\substack{v\in\mathbb{C}^n \\ v\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}v\|_1}{\|v\|_1}$$

$$\|\mathbb{A}\|_2 \overset{\text{def}}{=} \sup_{\substack{v\in\mathbb{C}^n \\ v\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}v\|_2}{\|v\|_2} = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A})} = \sqrt{\rho(\mathbb{A}\mathbb{A}^*)} = \|\mathbb{A}^*\|_2$$

$$\|\mathbb{A}\|_\infty \overset{\text{def}}{=} \sup_{\substack{v\in\mathbb{C}^n \\ v\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}v\|_\infty}{\|v\|_\infty} = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

La norme $\|\cdot\|_2$ est invariante par transformation unitaire :

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{I} \Rightarrow \|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 = \|\mathbb{U}\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2$$

Généralités

Par ailleurs, si la matrice A est normale :

$$\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A} \Rightarrow \|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A})$$

Remarque 1.1

1. Si une matrice $\mathbb{A}$ est hermitienne, ou symétrique (donc normale), on a $\|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A})$
2. Si une matrice $\mathbb{A}$ est unitaire ou orthogonale (donc normale), on a $\|\mathbb{A}\|_2 = 1$

Généralités

Théorème 1.8

1. Si une matrice $\mathbb{A}$ une matrice carrée quelconque et $\|\cdot\|$ une norme matricielle subordonnée ou non, quelconque. Alors

$$\rho(\mathbb{A}) \leq \|\mathbb{A}\|_2$$

2. Etant donné une matrice $\mathbb{A}$ et un nombre $\epsilon > 0$, il existe au moins une norme matricielle subordonnée telle que

$$\|\mathbb{A}\|_2 \leq \rho(\mathbb{A}) + \epsilon.$$

Généralités

Théorème 1.9

L'application $\|\cdot\|_E : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$\|\mathbb{A}\|_E = \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{tr(\mathbb{A}^*\mathbb{A})}$$

pour toute matrice $\mathbb{A} = (a_{ij})$ d'ordre n, est une norme matricielle non subordonnée (pour $n \geq 2$), invariante par transformation unitaire :

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{I} \Rightarrow \|\mathbb{A}\|_E = \|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_E = \|\mathbb{U}\mathbb{A}\|_E = \|\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U}\|_E$$

et qui vérifie

$$\|\mathbb{A}\|_2 \leq \|\mathbb{A}\|_E \leq \sqrt{n}\|\mathbb{A}\|_2, \forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n.$$

Généralités

De plus $\|\mathbb{I}\|_E = \sqrt{n}$

Contenu

Généralités

Erreur d'arrondi

Un nombre réel s'écrit de façon unique $x = \pm a 10^b$, où a est la mantisse, b l'exposant, entier. a est un nombre réel tel que $0.1 \leq a < 1$. L'arrondi de x à l termes est noté $arr_l(x) = \bar{x}$ et est égal à $\pm \bar{a} 10^b$, avec $\bar{a} = \underbrace{0.\cdots.}_{l}$

par exemple $\pi = 3.141592653\cdots$ s'écrit $\pi = 0.\underbrace{31415926}_{8}53\cdots 10^1$,

et avec l=8, on a $\bar{\pi} = 0.\underbrace{31415927}_{8}10^1$.

Généralités

Définition 1.7

La précision de l'ordinateur est le plus petit eps tel que $arr_l(1+eps) > 1$.

$$x = 0.\underbrace{10\cdots0}_{l}49\cdots10^1, arr_l(x) = 1$$

$$x = 0.\underbrace{10\cdots0}_{l}50\cdots10^1, arr_l(x) = 0.\underbrace{10\cdots0}_{l}110^1 > 1$$

On en déduit que $eps = 510^{-l}$. Si l'on calcule en base 2, on aura 2^{-l}.
On a pour tout $x \neq 0$, $\left|\frac{x-arr_l(x)}{x}\right| < eps$. En effet

$$\frac{x-arr_l(x)}{x} = \frac{(a-\bar{a})10^b}{a10^b} = \frac{(a-\bar{a})}{a} \leq \frac{510^{-l-1}}{10^{-1}} = 510^{-l} = eps$$

On peut écrire aussi $arr_l(x) = x(1+\epsilon)$, avec $|\epsilon| < eps$.

Généralités

Conditionnement d'un problème

Soit P un problème, c'est-à-dire une application de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$. Par exemple le produit de 2 nombres s'écrit

$$(x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2.$$

Le conditionnement de P mesure l'influence d'une perturbation de x sur la solution du problème P(x) :

Définition 1.8

La condition $\mathcal{K}$ de P est le plus petit nombre tel que

$$\left|\frac{x-\hat{x}}{x}\right| < eps \Rightarrow \left|\frac{P(x)-P(\hat{x})}{P(x)}\right| < \mathcal{K}.eps$$

Généralités

Définition 1.8 (suite)

Si $\mathcal{K}$ est grand, le proble?me est mal conditionné, si $\mathcal{K}$ n'est pas trop grand, le problème est bien conditionné.

Exemple 1.1

produit de 2 nombres. Soient $\hat{x}_i = (1+\epsilon_i)x_i$, et $\epsilon = max(|\epsilon_i|)$.

$$\frac{x_1x_2 - \hat{x_1}\hat{x_2}}{x_1x_2} = (1+\epsilon_1)(1+\epsilon_2) - 1 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_2,$$

d'où

$$\left|\frac{x_1x_2 - \hat{x_1}\hat{x_2}}{x_1x_2}\right| \leq \epsilon^2 + 2\epsilon$$

Comme $\epsilon 2$ est négligeable devant ϵ, on a $\mathcal{K} \approx 2$

Généralités

Conditionnement d'une matrice

On veut estimer x-y, où x est solution du système linéaire, et y solution du système perturbé

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$(\mathbb{A} + \Delta\mathbb{A})\mathbf{y} = (\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b})$$

Généralités

Exemple de R.S. Wilson :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{A} + \Delta\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8,1 & 7,2 \\ 7,08 & 5,04 & 6 & 5 \\ 8 & 5,98 & 9,89 & 9 \\ 6,99 & 4,99 & 9 & 9,98 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} + \Delta\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 32,01 \\ 22,99 \\ 33,01 \\ 30,99 \end{pmatrix},$$

$$\Delta\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,1 & 0,2 \\ 0,08 & 0,04 & 0 & 0 \\ 0 & -0,02 & -0,11 & 0 \\ -0,01 & -0,01 & 0 & -0,02 \end{pmatrix}, \quad \Delta\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0,01 \\ -0,01 \\ 0,01 \\ -0,01 \end{pmatrix}.$$

Généralités

Exemple de R.S. Wilson (suite) :

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\Delta b} \Longleftrightarrow \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1,82 \\ -0,36 \\ 1,35 \\ 0,79 \end{pmatrix}, \Longrightarrow \boldsymbol{\Delta x} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0,82 \\ -1,36 \\ 0,35 \\ -0,21 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbb{A} + \Delta\mathbb{A})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -81 \\ 137 \\ -34 \\ 22 \end{pmatrix}, \Longrightarrow \boldsymbol{\Delta x} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -82 \\ 136 \\ -35 \\ 21 \end{pmatrix}$$

Généralités

Définition 1.9

Soit $|||\cdot|||$ une norme matricielle subordonnée, le **conditionnement** d'une matrice régulière A, associé à cette norme, est le nombre

$$cond(\mathbb{A}) = \|\mathbb{A}\|\|\mathbb{A}^{-1}\|$$

Nous noterons $cond_p(\mathbb{A}) = \|\mathbb{A}\|_p\|\mathbb{A}^{-1}\|_p$

Théorème 1.10

Soit $\mathbb{A}$ une matrice inversible. Soient $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}$ les solutions respectives de

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ et } \mathbb{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = (\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b})$$

Généralités

Théorème 1.10 (suite)

Supposons $\mathbf{b} \neq 0$, alors l'inégalité

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq cond(\mathbb{A}) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

est satisfaite, et c'est la meilleure possible : pour une matrice $\mathbb{A}$ donnée, on peut trouver des vecteurs $\mathbf{b} \neq 0$ et $\Delta \mathbf{x} \neq 0$ tels qu'elle devienne une égalité.

Généralités

Preuve

Soit $\mathbb{A}$ une matrice inversible. Soient $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}$ les solutions respectives de

$$\mathbb{A}\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{b}$$

d'où

$$\|\Delta x\| \leq \|\mathbb{A}^{-1}\| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \|b\| \leq \|\mathbb{A}^{-1}\| \|\mathbb{A}\| \|x\| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Généralités

Théorème 1.11

Soit $\mathbb{A}$ une matrice inversible. Soient $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}$ les solutions respectives de

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ et } (\mathbb{A} + \Delta\mathbb{A})(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

Supposons $\mathbf{b} \neq 0$, alors l'inégalité

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leq cond(\mathbb{A}) \frac{\|\Delta\mathbb{A}\|}{\|\mathbb{A}\|}$$

est satisfaite, et c'est la meilleure possible : pour une matrice $\mathbb{A}$ donnée, on peut trouver un vecteur $\mathbf{b} \neq 0$ et une matrice $\Delta\mathbb{A} \neq 0$ tels qu'elle devienne une égalité.

Généralités

Théorème 1.12

- Pour toute une matrice inversible $\mathbb{A}$,

$$\begin{aligned} cond(\mathbb{A}) &\geq 1, \\ cond(\mathbb{A}) &= cond(\mathbb{A}^{-1}), \\ cond(\alpha\mathbb{A}) &= cond(\mathbb{A}), \text{ pour , tout scalaire } \alpha \neq 0 \end{aligned}$$

- Pour toute matrice inversible $\mathbb{A}$,

$$cond_2(\mathbb{A}) = \frac{\mu_{max}}{\mu_{min}}$$

où μ_{max} et μ_{min} sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur singulière de $\mathbb{A}$.

Généralités

Théorème 1.12 (suite)

- Si $\mathbb{A}$ est une matrice normale,

$$cond_2(\mathbb{A}) = \frac{\max_i |\lambda_i(\mathbb{A})|}{\min_i |\lambda_i(\mathbb{A})|}$$

  où les $\lambda_i(\mathbb{A})$ sont les valeurs propres de A.

- Le conditionnement $cond_2(\mathbb{A})$ d'une matrice unitaire ou orthogonale vaut 1.
- Le conditionnement $cond_2(\mathbb{A})$ est invariant par transformation unitaire

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{I} \Rightarrow cond_2(\mathbb{A}) = cond_2(\mathbb{A}\mathbb{U}) = cond_2(\mathbb{U}\mathbb{A}) = cond_2(\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U})$$

Généralités

Rappel 1.4

Les valeurs singulières d'une matrice rectangulaire A sont les racines carrées positives des valeurs propres de $\mathbb{A}^*\mathbb{A}$.

Contenu

Généralités

Lorsque l'on veut résoudre un système linéaire Ax=b avec une matrice mal conditionnée, il peut être intéressant de multiplier à gauche par une matrice C telle CA soit mieux conditionnée. L'exemple le plus simple est le *préconditionnement diagonal*, où la matrice C est la matrice diagonale constituée des inverses des éléments diagonaux de A.