Université Gaston Berger de Saint-Louis

Résolution numérique de systèmes linéaires
Méthodes directes

Pr. Ousmane THIARE

http://www.ousmanethiare.com

May 10, 2024

Contenu

Contenu

Systèmes triangulaires

Considérons un système triangulaire (inférieur) du type :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = & b_2 \\ \qquad\qquad\ddots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

c'est-à-dire associé a une matrice triangulaire inférieure

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & \cdots & a_{n-1n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Systèmes triangulaires

la résolution est très aisée : on commence par résoudre la première équation :

$$\text{Si } a_{11} \neq 0, x_1 = b_1/a_{11}$$

puis on reporte la valeur de x_1 ainsi déterminée dans la deuxième équation et on calcule x_2, etc. A l'étape i on a :

$$\text{Si } a_{ii} \neq 0, x_i = (b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{ii-1}x_{i-1})/a_{ii}.$$

ce qui nécessite 3 instructions pour l'implémentation. Regardons la complexité de l'algorithme, c'est-a-dire le nombre d'opérations élémentaires pour la résolution du système. Une opération élémentaire est une des 4 opérations addition($+$), soustraction(-), multiplication($*$) et division ($/$). En général on les groupe en addition/soustraction et multiplication/division. On appelle N^+ et N^* les nombres d'opérations correspondants.

Systèmes triangulaires

On peut établir le tableau suivant

ligne	N^+	N^*
1	0	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	$i-1$	i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$n-1$	n

D'où le nombre total d'opérations en sommant sur i :

$$N^+ = \sum_{i=1}^{n}(i-1) = \frac{n}{(n-1)}$$

$$N^* = \sum_{i=1}^{n}(i) = \frac{n}{(n+1)}$$

Systèmes triangulaires

La démarche est la même pour un système triangulaire supérieur, i.e.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 + \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & + & a_{22}x_2 \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

On le résout en remontant :

$$\text{Si } a_{nn} \neq 0, x_n = b_n / a_{nn}$$

puis on reporte la valeur de x_n ainsi déterminée dans la deuxième équation et on calcule x_{n-1}, etc. A l'étape i on a :

$$\text{Si } a_{ii} \neq 0, x_i = (b_i - a_{ii+1}x_{i+1} - a_{ii+2}x_{i+2} - \cdots - a_{in}x_n)/a_{ii}.$$

Le nombre d'opérations est le même.

Décomposition LU : un résultat théorique

Le principe de la méthode est de se ramener à deux systèmes triangulaires.

1. On décompose la matrice A en le produit de deux matrices

$$A = LU$$

   où U est triangulaire supérieure, et L est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale. On a alors à résoudre le système

$$LUx = b$$

2. On résout le système triangulaire

$$Ly = b$$

   d'inconnue y.
3. On résout le système triangulaire

$$Ux = y$$

Décomposition LU : un résultat théorique

Reste maintenant à savoir comment faire cette décomposition LU.
Commençons par un résultat théorique

Théorème 3.1

Soit A une matrice inversible d'ordre n dont les mineurs principaux sont non nuls. Alors il existe une unique matrice L triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale, et une unique matrice U triangulaire supérieure telles que A = LU. De plus $det(A) = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$

Rappelons que le mineur principal d'ordre i de A est le déterminant des i premières lignes et premières colonnes :

$$(det\ A)_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix}$$

Décomposition LU : un résultat théorique

La démonstration se fait par récurrence sur n.
Etape 1 : le résultat est évidemment vrai pour n=1.
Etape 2 : on suppose le résultat vrai pour n-1. On décompose la matrice A par blocs sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} A^{(n-1)} & c \\ b^T & a_{nn} \end{pmatrix}$$

où $A^{(n-1)}$ est la matrice $(n-1) \times (n-1)$ des (n-1) premières lignes et colonnes de A, c et b sont des vecteurs colonnes donnés par

$$c = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n-1n} \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} a_{n1} \\ \vdots \\ a_{nn-1} \end{pmatrix}$$

Décomposition LU : un résultat théorique

La matrice $A^{(n-1)}$ a les mêmes mineurs principaux que A, on peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence :il existe deux matrices $L^{(n-1)}$ triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale, et $U^{(n-1)}$ triangulaire supérieure telles que $A^{(n-1)} = L^{(n-1)}U^{(n-1)}$. Cherchons alors L et U décomposées par blocs sous la forme

$$L = \begin{pmatrix} L^{(n-1)} & 0 \\ {}^t l & 1 \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} U^{(n-1)} & u \\ 0 & u_{nn} \end{pmatrix};$$

En effectuant le produit par blocs et en identifiant a la décomposition de A, on obtient le système d'équations

Décomposition LU : un résultat théorique

$$\begin{aligned} A^{(n-1)} &= L^{(n-1)}U^{(n-1)} \\ {}^t b &= {}^t l U^{(n-1)} \\ c &= L^{(n-1)}u \\ a_{nn} &= {}^t l u + u_{nn} \end{aligned}$$

Ceci se résout immédiatement par

$$\begin{aligned} {}^t l &= {}^t b (U^{(n-1)})^{-1} \\ u &= (L^{(n-1)})^{-1} c \\ u_{nn} &= a_{nn} - {}^t b (A^{(n-1)})^{-1} c \end{aligned}$$

La question de l'unicité se règle de la façon suivante.

Décomposition LU : un résultat théorique

Supposons qu'il existe 2 couples de matrices $(L_{(1)}, U_{(1)})$ et $(L_{(2)}, U_{(2)})$ tels que

$$A = L_{(1)} U_{(1)} = L_{(2)} U_{(2)}$$

Puisque toutes ces matrices sont inversibles, on en déduit que

$$U_{(1)} (U_{(2)})^{-1} = (L_{(1)})^{-1} L_{(2)}$$

Dans le membre de gauche on a une matrice triangulaire supérieure, dans le membre de droite on a une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale. Pour qu'elles coincident, il faut qu'elles soient égales a l'identité.

Décomposition LU : méthode de Gauss

Pour construire les matrices L et U, on applique la méthode de Gauss qui consiste à trigonaliser le système pas a pas. Reprenons le système (1.2), et notons L_i la ième ligne du système. En supposant le premier **pivot** a_{11} non nul, soustrayons à chaque ligne L_i la première ligne L_1 divisée par a_{11} et multipliée par a_{i1} : cette opération annule le coefficient de x_1 dans les lignes 2 à n.

$$
\begin{array}{lrcl}
L_1 & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n & = & b_i \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
L_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}} & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}
$$

Décomposition LU : méthode de Gauss

On note $m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$ pour $1 \leq i \leq n$. On obtient alors le nouveau système

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & & (a_{22} - m_{21}a_{12})x_2 & + & \cdots & + & (a_{2n} - m_{21}a_{1n})x_n & = & b_2 - m_{21}b_1 \\
 & & \vdots & & & & \vdots & & \\
 & & (a_{i2} - m_{i1}a_{12})x_2 & + & \cdots & + & (a_{in} - m_{i1}a_{1n})x_n & = & b_i - m_{i1}b_1 \\
 & & \vdots & & & & \vdots & & \\
 & & (a_{n2} - m_{n1}a_{12})x_2 & + & \cdots & + & (a_{nn} - m_{n1}a_{1n})x_n & = & b_n - m_{n1}b_1
\end{array}$$

Décomposition LU : méthode de Gauss

ou encore

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-m_{21}a_{12} & \cdots & a_{2n}-m_{21}a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{i2}-m_{i1}a_{12} & \cdots & a_{in}-m_{i1}a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}-m_{n1}a_{12} & \cdots & a_{nn}-m_{n1}a_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 - m_{21}b_1 \\ \vdots \\ b_i - m_{i1}b_1 \\ \vdots \\ b_n - m_{n1}b_1 \end{pmatrix}$$

La matrice du nouveau système est

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-m_{21}a_{12} & \cdots & a_{2n}-m_{21}a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{i2}-m_{i1}a_{12} & \cdots & a_{in}-m_{i1}a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}-m_{n1}a_{12} & \cdots & a_{nn}-m_{n1}a_{1n} \end{pmatrix}$$

Décomposition LU : méthode de Gauss

et le second membre est

$$b^{(2)} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 - m_{21}b_1 \\ \vdots \\ b_i - m_{i1}b_1 \\ \vdots \\ b_n - m_{n1}b_1 \end{pmatrix}$$

Le nouveau système s'écrit alors

$$A^{(2)}x = b^{(2)}$$

et il est équivalent au système de départ.

Décomposition LU : méthode de Gauss

On introduit la matrice

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -m_{i1} & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -m_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il est facile de voir que $A^{(2)} = M^{(1)}A$ et $b^{(2)} = M^{(1)}b$: **les manipulations sur les lignes reviennent à multiplier la matrice et le second membre du système par la matrice** $M^{(1)}$. La matrice $A^{(2)}$ contient maintenant uniquement des zeros sous la diagonale dans la première colonne. C'est ce processus que nous allons continuer : a l'étape k nous avons la matrice $A^{(k)}$ qui a la forme suivante

Décomposition LU : méthode de Gauss

On introduit la matrice

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \cdots & \cdots & & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & & & & a_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & a_{k-1k-1}^{(k)} & a_{k-1k}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

et le système associé s'écrit

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}^{(k)}x_1 & + & a_{12}^{(k)}x_2 & + & \cdots & + & \cdots & + & a_{1n}^{(k)}x_n & = & b_1^{(k)} \\ & & a_{22}^{(k)}x_2 & + & \cdots & + & \cdots & + & a_{2n}^{(k)}x_n & = & b_2^{(k)} \\ & & & & a_{33}^{(k)}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}^{(k)}x_n & = & b_3^{(k)} \\ & & & & & & \cdots & & & & \vdots \\ & & & & & & a_{kk}^{(k)}x_k & + & a_{kn}^{(k)}x_n & = & b_k^{(k)} \\ & & & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & a_{nk}^{(k)}x_k & + & a_{nn}^{(k)}x_n & = & b_n^{(k)} \end{array}$$

soit sous forme compacte $A^{(k)}x = b^{(k)}$.

Décomposition LU : méthode de Gauss

Il faut maintenant faire les manipulations sur les lignes adaptées. Supposons que le **k-ème pivot** $a_{kk}^{(k)}$ est non nul, et notons $L^{(k)}$ la i-ème ligne du système.

$$
\begin{array}{llcccccccccccc}
L_1^{(k)} & a_{11}^{(k)}x_1 & + & \cdots & + & \cdots & + & \cdots & + & a_{1n}^{(k)}x_n & = & b_1^{(k)} \\
L_2^{(k)} & & & a_{22}^{(k)}x_2 & + & \cdots & + & \cdots & + & a_{2n}^{(k)}x_n & = & b_2^{(k)} \\
\vdots & & & & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
L_k^{(k)} & & & & & a_{kk}^{(k)}x_k & + & \cdots & + & a_{kn}^{(k)}x_n & = & b_k^{(k)} \\
L_{k+1}^{(k)} - \frac{a_{k+1k}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}L_k^{(k)} & & & & & a_{k+1k}^{(k)}x_k & + & \cdots & + & a_{k+1n}^{(k)}x_n & = & b_{k+1}^{(k)} \\
L_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}L_k^{(k)} & & & & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
L_n^{(k)} - \frac{a_{nk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}L_k^{(k)} & & & & & a_{nk}^{(k)}x_k & + & \cdots & + & a_{nn}^{(k)}x_n & = & b_n^{(k)}
\end{array}
$$

Décomposition LU : méthode de Gauss

Cette opération annule les coefficients de x_k dans les lignes k+1 à n. Nous avons fait un pas de plus vers la trigonalisation de la matrice A.

Notons maintenant $m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
L_1^{(k)} & a_{11}^{(k)}x_1 & + & \cdots & + & \cdots & + & \cdots & + & a_{1n}^{(k)}x_n & = & b_1^{(k)} \\
L_2^{(k)} & & & a_{22}^{(k)}x_2 & + & \cdots & + & \cdots & + & a_{2n}^{(k)}x_n & = & b_2^{(k)} \\
\vdots & & & & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
L_k^{(k)} & & & & & a_{kk}^{(k)}x_k & + & \cdots & + & a_{kn}^{(k)}x_n & = & b_k^{(k)} \\
L_{k+1}^{(k)} - \frac{a_{k+1k}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}L_k^{(k)} & & & & & a_{k+1k}^{(k)}x_k & + & \cdots & + & a_{k+1n}^{(k)}x_n & = & b_{k+1}^{(k)} \\
L_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}L_k^{(k)} & & & & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
L_n^{(k)} - \frac{a_{nk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}L_k^{(k)} & & & & & a_{nk}^{(k)}x_k & + & \cdots & + & a_{nn}^{(k)}x_n & = & b_n^{(k)}
\end{array}
$$

pour $k \leq i \leq n$ et introduisons la matrice

Décomposition LU : méthode de Gauss

$$M^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & & & & 0 \\ \vdots & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & -m_{k+1k} & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -m_{nk} & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

Alors les manipulations sur les lignes reviennent à multiplier la matrice et le second membre du système par la matrice $M^{(k)}$. On obtient donc le système $A^{(k+1)}x = b^{(k+1)}$, avec $A^{(k+1)} = M^{(k)}A^{(k)}$ et $b^{(k+1)} = M^{(k)}b^{(k)}$, et l'on a gagné une nouvelle colonne de zéros. A l'étape n, on obtient une matrice $A^{(n)}$ qui est triangulaire supérieure, et le système

$$A^{(n)}x = b^{(n)}$$

avec $A^{(n)} = M^{(n)} \cdots M^{(1)}A$ et $b^{(n)} = M^{(n)} \cdots M^{(1)}b$.

Décomposition LU : méthode de Gauss

Posons maintenant $U = A^{(n)}$ et $L = (M^{(n)} \cdots M(1))^{-1}$, alors A=LU, U est triangulaire supérieure et il est facile de voir que L est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale. Ses coefficients sont les m_{ik}. Nous avons ainsi obtenu pratiquement la décomposition LU.

Méthode de Crout

Pour calculer explicitement les matrices L et U, on a intérêt à procéder par substitution : c'est la méthode de Crout. Ecrivons le produit LU :

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{i1} & m_{i2} & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \vdots & m_{nn-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & \cdots & & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & & & & \\ \vdots & 0 & u_{33} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Ecrivons l'égalité des coefficients ligne par ligne

- Ligne 1
  Pour $j = 1, \cdots, n, a_{1j} = u_{1j}$, ce qui permet de calculer

$$j = 1, \cdots, n, u_{1j} = a_{1j}$$

Méthode de Crout

- Ligne 2
  - Colonne 1 $a_{21} = l_{21}u_{11}$, et puisque u_{11} est maintenant connu, on en déduit
$$l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}}$$
  - Colonne j, pour $j \geq 2$, $a_{2j} = l_{21}u_{1j} + u_{2j}$, et donc
$$j = 2, \cdots, n, u_{2j} = a_{2j} - l_{21}u_{1j}$$
- Ligne i: supposons que nous avons été capable de calculer

$$\begin{array}{cccccc}
u_{11} & u_{12} & \cdots & & & u_{1n} \\
l_{21} & u_{22} & \cdots & & & u_{2n} \\
\vdots & & \cdots & & & \\
\vdots & & \cdots & & & \\
l_{i-11} & \cdots & l_{i-1i-2} & u_{i-1i-1} & \cdots & u_{i-1n}
\end{array}$$

Méthode de Crout

- Ligne i: supposons que nous avons été capable de calculer

$$\begin{array}{cccccc}
u_{11} & u_{12} & \cdots & & & u_{1n} \\
l_{21} & u_{22} & \cdots & & & u_{2n} \\
\vdots & & \cdots & & & \\
\vdots & & \cdots & & & \\
l_{i-11} & \cdots & l_{i-1i-2} & u_{i-1i-1} & \cdots & u_{i-1n}
\end{array}$$

  - Colonne 1 : $a_{i1} = l_{i1} u_{11}$, on en déduit l_{i1}

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}$$

  - Colonne j¡i : $a_{ij} = l_{i1} u_{1j} + l_{i2} u_{2j} + \cdots + l_{ij} u_{jj}$, d'où

$$j = 1, \cdots, j, l_{ij} = \frac{a_{ij} - l_{i1} u_{1j} - \cdots - l_{ij-1} u_{j-1j}}{u_{jj}}$$

  - Colonne $j \geq i$: $a_{ij} = l_{i1} u_{1j} + l_{i2} u_{2j} + \cdots + l_{ii} u_{ij}$, d'où

$$j = i, \cdots, n, u_{ij} = a_{ij} - l_{i1} u_{1j} - \cdots - l_{ii-1} u_{i-1j}$$

Méthode de Crout

Remarquons qu'à la ligne i nous utilisons les valeurs de A a la ligne i et les valeurs de L et U calculées précédemment. D'un point de vue informatique, on mettra L et U à la place de A ligne par ligne.
Calculons le nombre d'opérations nécessaires à la décomposition LU.

Complexité de l'algorithme

Considérons l'algorithme de Crout. Avec les notations de la section 1.2.1, reprenons notre tableau. La ligne 1 nécessite 0 opérations. A la ligne i, notons N_i^+ et N_i^* le nombre d'opérations élémentaires :

colonne		
$j < i$	$j-1$	j
$\dots$	$\dots$	$\dots$
$j \geq i$	$i-1$	$i-1$
$\dots$	$\dots$	$\dots$
total	N_i^+	N_i^*

On a donc $N_i^* = \sum_{j=1}^{i-1}(j) + \sum_{j=1}^{i-1}(i-1) = \dfrac{i(i-1)}{2} + (i-1)(n-i+1)$

et $N^* = \sum_{i=1}^{n}(N_i^*) = \dfrac{n(n^2-1)}{3}$.

Complexité de l'algorithme

On fait le même calcul pour N^+ et on a

$$N^* = \frac{n(n^2-1)}{3}, N^+ = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

Méthode du pivot partiel

Il peut se passer dans la pratique que l'un des pivots $a_{kk}^{(k)}$ soit nul. D'autre part, examinons le système ci-dessous :

$$\begin{aligned} 10^{-4}x + y &= 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

et appliquons la méthode de Gauss avec comme pivot 10^{-4}. On obtient formellement

$$(1 - 1/10^{-4})y = 2 - 10^{-4}$$

Ceci, calculé en virgule flottante avec 3 chiffres significatifs, donne y = 1, puis x = 0, ce qui est notoirement faux.

Méthode du pivot partiel

Echangeons maintenant les deux lignes

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 10^{-4}x + y &= 1 \end{aligned}$$

et prenons comme pivot 1 . On obtient maintenant

$$(1 - 10^{-4})y = 1 - 2.10^{-4}.$$

Ceci, calculé en virgule flottante avec 3 chiffres significatifs, donne y=1, puis x=1.
En fait la raison du problème est que le pivot 10^{-4} est trop petit .

Méthode du pivot partiel

Explicitons maintenant la méthode. Pour cela reprenons la matrice $A^{(k)}$

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \cdots & \cdots & & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & & & & a_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & a_{k-1k-1}^{(k)} & & & \\ 0 & 0 & 0 & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

Si A est inversible, si $a_{kk}^{(k)} = 0$, il existe forcément un indice i supérieur à k tel que $a_{ik}^{(k)}$. En effet A est inversible si et seulement si $A^{(k)}$ l'est, et le déterminant de $A^{(k)}$ est égal à :

$$det\, A^{(k)} = a_{11}^{(k)} \cdots a_{k-1k-1}^{(k)} \begin{vmatrix} a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & & \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{vmatrix}$$

Méthode du pivot partiel

Donc si A est inversible, au moins un des éléments de la première colonne de cette dernière matrice est non nul.
Soit i_0 l'indice du nombre le plus grand en module :

$$|a_{i_0 k}^{(k)}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}^{(k)}|$$

La méthode du pivot partiel consiste à échanger la ligne k et la ligne i_0 du système ; En fait cela revient à multiplier à gauche les deux membres du système matriciel par une matrice de permutation : la matrice correspondant à la transposition τ_k de $\{1, \cdots, n\}$ définie par

$$\begin{aligned} \tau_k(k) &= i_0 \\ \tau_k(i_0) &= i \\ \tau_k(i) &= i \text{ si } i \neq k \text{ et } i \neq i_0 \end{aligned}$$

Méthode du pivot partiel

La matrice correspondante est définie par ses vecteurs colonnes

$$P_{\tau_k}(e_j) = e_{\tau_k}(j)$$

ou encore par ses éléments $(P_{\tau_k})_{ij} = \delta_{i\tau_k}(j)$
On peut définir plus généralement la matrice de permutation associée à une permutation σ de $\{1, \cdots, n\}$ par

$$P_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$$

ou encore par ses éléments $(P_\sigma)_{ij} = \delta_{i\sigma}(j)$
Ces matrices sont inversibles, leur déterminant est égal à la signature de la permutation, donc ± 1, et on a les résultats suivants :

Méthode du pivot partiel

Multiplier la matrice A à gauche par la matrice P_σ revient à effectuer la permutation $\sigma - 1$ sur les lignes de A,
Multiplier la matrice A à droite par la matrice P_σ revient à effectuer la permutation σ sur les colonnes de A.
Soient σ et τ deux permutations, $P_\sigma P_\tau = P_{\sigma\circ\tau}$.
Donc à l'étape k, on multiplie la matrice $A^{(k)}$ par une matrice de permutation P_{τ_k} , puis on fait la (k + 1) ème étape de la réduction de Gauss sur la matrice $P_{\tau_k}A^{(k)}$. On obtient donc ainsi

$$U = M^{(n-1)}P_{\tau_{n-1}} \cdots M^{(1)}P_{\tau_1}A.$$

Méthode du pivot partiel

Théorème 3.2

Soit A une matrice carrée régulière d'ordre n. Il existe une matrice de permutation P et deux matrices L et U, L étant triangulaire inférieure à diagonale unité et U étant triangulaire supérieure, telles que

$$PA = LU$$

Preuve

Il suffit de remarquer que pour toute permutation σ de $1, \cdots, n$, pour toute matrice M, la matrice $\tilde{M} = P_\sigma^{-1} M P_\sigma$ est obtenue en effectuant la permutation σ sur les lignes et les colonnes de M. Si M est de type $M^{(k)}$ avec $j \geq k$, alors $\tilde{M}$ a la même forme que M. On peut alors écrire

$$U = \tilde{M}^{(n-1)} \cdots \tilde{M}^{(1)} P_{\tau_{n-1}} \cdots P_{\tau_1} A.$$

Méthode du pivot partiel

Preuve (suite)

Posons $\sigma = \tau_{n-1} \circ \cdots \circ$, alors

$$U = \tilde{M}^{(n-1)} \ldots \tilde{M}^{(1)} P_\tau A.$$

et l'on conclut comme précédemment avec $L = (\tilde{M}^{(n-1)} \ldots \tilde{M}^{(1)})^{-1}$

Remarque 3.2

Pour calculer le déterminant d'une matrice, les formules de Cramer sont à prohiber. On utilise la décomposition LU et $D(A) = \prod u_{ii}$

Remarque 3.2

On peut écrire la décomposition LU sous la forme LDV où V est à diagonale unité et D une matrice diagonale.

Contenu

Méthode de Choleski

D'après la remarque 3.2, si A est une matrice symétrique, par l'unicité de la décomposition, on peut écrire $A = LD^tL$.

Preuve

On applique la décomposition LU, en vérifiant que si A est symétrique définie positive, les mineurs principaux sont non nuls.

Une factorisation de Choleski de A est une factorisation sous la forme $A = B^tB$, où B est une matrice triangulaire inférieure.

Théorème 3.4

Soit A une matrice symétrique définie positive. Alors il existe une unique décomposition de Choleski de A sous la forme $A = B^tB$, où B est une matrice triangulaire inférieure à coefficients diagonaux strictement positifs.

Méthode de Choleski

Preuve

D'après le théorème précédent, A s'écrit sous la forme LD^tL. Puisque D est diagonale à éléments strictement positifs, on peut définir la matrice racine carrée de D comme la matrice dont les éléments diagonaux sont $\sqrt{d_{ii}}$. On définit alors $B = L\sqrt{D}$. L'unicité se démontre comme pour la décomposition LU.