



Université Gaston Berger de Saint-Louis

Résolution numérique de systèmes linéaires Méthodes itératives

Pr. Ousmane THIARE

<http://www.ousmanethiare.com>

May 10, 2024

Contenu

Méthodes itératives

- Suite de vecteurs et de matrices
- Méthode de Jacobi, Gauss-Seidel, S.O.R.
- Résultats généraux de convergence
- Cas des matrices hermitiennes
- Cas des matrices tridiagonales
- Matrices à diagonale dominante
- La matrices du laplacien
- Complexité

Contenu

Méthodes itératives

- Suite de vecteurs et de matrices

- Méthode de Jacobi, Gauss-Seidel, S.O.R.

- Résultats généraux de convergence

- Cas des matrices hermitiennes

- Cas des matrices tridiagonales

- Matrices à diagonale dominante

- La matrices du laplacien

- Complexité

Suite de vecteurs et de matrices

Définition 4.1

Soit V un espace vectoriel muni d'une norme $\| \cdot \|$, on dit qu'une suite (v_k) d'éléments de V converge vers un élément $v \in V$, si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k - v\| = 0$$

et on écrit

$$v = \lim_{k \rightarrow \infty} v_k$$

Remarque 4.1

Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Donc v_k tend vers v si et seulement si $\|v_k - v\|$ tend vers 0 pour une norme.

Suite de vecteurs et de matrices

Théorème 4.1

1. Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle subordonnée, et \mathbb{B} une matrice vérifiant

$$\|\mathbb{B}\| < 1$$

Alors la matrice $(\mathbb{I} + \mathbb{B})$ est inversible, et

$$\|(\mathbb{I} + \mathbb{B})^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|\mathbb{B}\|}$$

2. Si une matrice de la forme $(\mathbb{I} + \mathbb{B})$ est singulière, alors nécessairement

$$\|\mathbb{B}\| \geq 1$$

pour toute norme matricielle, subordonnée ou non.

Suite de vecteurs et de matrices

Théorème 4.2

Soit \mathbb{B} une matrice carrée. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{B}^k = 0$
2. $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{B}^k v = 0$ pour tout vecteur v
3. $\rho(\mathbb{B}) < 1$
4. $\|\mathbb{B}\| < 1$ pour au moins une norme matricielle subordonnée $\|\cdot\|$

Théorème 4.3

Soit \mathbb{B} une matrice carrée, et $\|\cdot\|$ une norme matricielle quelconque. Alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbb{B}^k\|^{\frac{1}{k}} = \rho(\mathbb{B})$$

Contenu

Méthodes itératives

Suite de vecteurs et de matrices

Méthode de Jacobi, Gauss-Seidel, S.O.R.

Résultats généraux de convergence

Cas des matrices hermitiennes

Cas des matrices tridiagonales

Matrices à diagonale dominante

La matrices du laplacien

Complexité

Méthode de Jacobi, Gauss-Seidel, S.O.R.

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice régulière et $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^n$. Il s'agit de résoudre le système $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ par une méthode itérative, c'est-à-dire de créer une suite \mathbf{x}^k qui converge vers \mathbf{x} . On note $\mathbb{D} = \text{diag}(\mathbb{A})$, \mathbb{E} la matrice triangulaire inférieure vérifiant

$$\begin{cases} e_{ij} = 0, & i \leq j \\ e_{ij} = -a_{ij}, & i > j \end{cases}$$

et \mathbb{F} la matrice triangulaire supérieure vérifiant

$$\begin{cases} f_{ij} = 0, & i \geq j \\ f_{ij} = -a_{ij}, & i < j \end{cases}$$

On a alors

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \ddots & & -\mathbb{F} \\ & \mathbb{D} & \\ -\mathbb{E} & & \ddots \end{pmatrix} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$$

Méthode de Jacobi, Gauss-Seidel, S.O.R.

Méthode de Jacobi

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Méthode de Gauss-Seidel

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Méthode de relaxation

$$x_i^{(k+1)} = \omega \hat{x}_i^{(k+1)} + (1 - \omega) x_i^{(k)}$$

où $\hat{x}_i^{(k+1)}$ est obtenu à partir de $x^{(k)}$ par l'une des deux méthodes précédentes.

Méthode de Jacobi, Gauss-Seidel, S.O.R.

Avec la méthode de Jacobi

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) + (1 - \omega) x_i^{(k)} \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Avec la méthode de Gauss-Seidel

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) + (1 - \omega) x_i^{(k)} \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Cette méthode de relaxation est appelée méthode S.O.R. (successive over relaxation) Toutes ces méthodes se mettent sous la forme

$$Mx^{k+1} = Nx^k + b$$

Méthode de Jacobi, Gauss-Seidel, S.O.R.

avec

Jacobi	$M = D$	$N = E + F$
Gauss-Seidel	$M = D - E$	$N = F$
SOR	$M = \frac{1}{\omega}D - E$	$N = \frac{1-\omega}{\omega}D + F$

Programmation d'une étape de l'algorithme de Jacobi :

```

Pour i=1:N
  S:=B(i)
  Pour j=1:I-1
    S=S-A(i,j)*X(j)
  Pour j=i+1:N
    S=S-A(i,j)*X(j)
  Y(i)=S/A(i,i)
Pour i=1:N
  X(i):=Y(i)

```

Test d'arrêt : on définit le résidu à l'étape k comme $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$.

Le test s'écrit : tant que $\|r^{(k)}\| > eps$, on continue.

Contenu

Méthodes itératives

- Suite de vecteurs et de matrices

- Méthode de Jacobi, Gauss-Seidel, S.O.R.

- Résultats généraux de convergence

- Cas des matrices hermitiennes

- Cas des matrices tridiagonales

- Matrices à diagonale dominante

- La matrices du laplacien

- Complexité

Résultats généraux de convergence

Soit donc l'algorithme

$$Mx^{k+1} = Nx^k + b$$

avec $M-N=A$. Si la suite converge, elle converge vers la solution x de $Ax=b$, et l'erreur $e^{(k)} = x^{(k)} - x$ est solution de $Me^{(k+1)} = Ne^{(k)}$.

On note $B = M^{-1}N$. D'après le théorème 4.2, on a

Théorème 4.4

La suite $x^{(k)}$ converge pour toute donnée initiale x^0 si et seulement si $\rho(\mathbb{B}) < 1$, si et seulement si $\|\mathbb{B}\| < 1$ pour au moins une norme matricielle subordonnée $\|\cdot\|$.

Résultats généraux de convergence

Il est d'usage d'affecter les noms suivants aux matrices des méthodes précédentes

Jacobi	$J = D^{-1}(E + F)$
SOR	$\mathcal{L}_\omega = \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1}\left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)$

Lemme 4.1

Pour tout $\omega \neq 0$, on a $\rho(\mathcal{L}_\omega) \geq |\omega - 1|$.

Résultats généraux de convergence

On en déduit par le théorème 4.4,

Théorème 4.5

Si la méthode de relaxation converge pour toute donnée initiale, on a

$$0 < \omega < 2$$

On définit le taux de convergence asymptotique par

$$R(B) = -\ln \rho(B)$$

Théorème 4.6

Le nombre d'itérations nécessaires pour réduire l'erreur d'un facteur ϵ est au moins égal à $K = \frac{-\ln \epsilon}{R(B)}$

Contenu

Méthodes itératives

- Suite de vecteurs et de matrices

- Méthode de Jacobi, Gauss-Seidel, S.O.R.

- Résultats généraux de convergence

- Cas des matrices hermitiennes

- Cas des matrices tridiagonales

- Matrices à diagonale dominante

- La matrices du laplacien

- Complexité

Cas des matrices hermitiennes

Théorème 4.7

Soit A une matrice hermitienne définie positive, $A=M-N$, où M est inversible. Si $M+N^*$ (qui est toujours hermitienne), est définie positive, la méthode itérative converge pour toute donnée initiale.

Corollaire 4.1

Soit A une matrice hermitienne définie positive. Si $\omega \in]0, 2[$, la méthode de relaxation converge pour toute donnée initiale.

Contenu

Méthodes itératives

- Suite de vecteurs et de matrices

- Méthode de Jacobi, Gauss-Seidel, S.O.R.

- Résultats généraux de convergence

- Cas des matrices hermitiennes

- Cas des matrices tridiagonales

- Matrices à diagonale dominante

- La matrices du laplacien

- Complexité

Cas des matrices tridiagonales

Théorème 4.8

Soit A une matrice tridiagonale. Alors $\rho(\mathcal{L}_1) = (\rho(J))^2$: les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel convergent ou divergent simultanément. Si elles convergent, la méthode de Gauss-Seidel est la plus rapide.

Théorème 4.9

Soit A une matrice tridiagonale telles que les valeurs propres de J soient réelles. Alors les méthodes de Jacobi et de relaxation convergent ou divergent simultanément pour $\omega \in]0, 2[$. Si elles convergent, la fonction

$\omega \mapsto \rho(\mathcal{L}_\omega)$ a l'allure suivante : avec $\omega^* = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - (\rho(J))^2}}$

Cas des matrices tridiagonales

Remarque 4.2

On ne connaît pas précisément ce ω^* si on ne connaît pas $\rho(J)$. Dans ce cas, le graphe ci-dessus montre que qu'il vaut mieux choisir ω trop grand que trop petit.

Contenu

Méthodes itératives

- Suite de vecteurs et de matrices

- Méthode de Jacobi, Gauss-Seidel, S.O.R.

- Résultats généraux de convergence

- Cas des matrices hermitiennes

- Cas des matrices tridiagonales

- Matrices à diagonale dominante

- La matrices du laplacien

- Complexité

Matrices à diagonale dominante

Théorème 4.10

Soit A une matrice à diagonale strictement dominante ou irréductible à diagonale dominante. Alors la méthode de Jacobi converge.

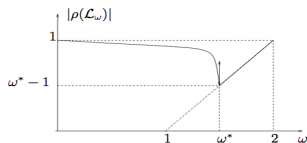


Figure: variation de \mathcal{L}_ω en fonction de ω

Théorème 4.11

Soit A une matrice à diagonale strictement dominante ou irréductible à diagonale dominante. Si $0 < \omega \leq 1$, la méthode de relaxation converge.

Contenu

Méthodes itératives

- Suite de vecteurs et de matrices

- Méthode de Jacobi, Gauss-Seidel, S.O.R.

- Résultats généraux de convergence

- Cas des matrices hermitiennes

- Cas des matrices tridiagonales

- Matrices à diagonale dominante

- La matrices du laplacien

- Complexité

La matrices du laplacien

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On a

$$\rho(J) = 1 - \frac{\pi^2}{2n^2} + \mathcal{O}(n^{-4}), \rho(\mathcal{L}_1) = 1 - \frac{\pi^2}{n^2} + \mathcal{O}(n^{-4}),$$

$$\omega^* = 2\left(1 - \frac{\pi}{n} + \mathcal{O}(n^{-2})\right), \rho(\mathcal{L}_{\omega^*}) = \omega^* - 1 = 1 - \frac{2\pi}{n} + \mathcal{O}(n^{-2}).$$

La matrices du laplacien

Pour $n=100$, pour obtenir une erreur de $\epsilon = 10^{-1}$, on doit faire

- 9342 itérations de l'algorithme de Jacobi,
- 4671 itérations de l'algorithme de Gauss-Seidel,
- 75 itérations de l'algorithme de l'algorithme de relaxation optimale.

Contenu

Méthodes itératives

Suite de vecteurs et de matrices

Méthode de Jacobi, Gauss-Seidel, S.O.R.

Résultats généraux de convergence

Cas des matrices hermitiennes

Cas des matrices tridiagonales

Matrices à diagonale dominante

La matrices du laplacien

Complexité

Complexité

Supposons la matrice A pleine. La complexité d'une itération est d'environ $2n^2$. Si l'on fait au moins n itérations, on a donc une complexité totale de $2n^3$, à comparer aux $2n^3/3$ de la méthode de Gauss.

Pour résoudre un système linéaire, on préférera les méthodes directes dans le cas des matrices pleines, et les méthodes itératives dans le cas des matrices creuses.