Théorie des graphes

Master 2 Informatique - UFR S.A.T

Prof. Ousmane THIARE

othiare@ugb.edu.sn
[www.ousmanethiare.com]

16 avril 2020

Introduction et Définitions

Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Historique

- 1726 : Leonhard Euler expose une solution formelle au problème des 7 ponts de Königsberg (Kaliningrad) :

« Lors d'une promenade, est-il possible de passer sur tous les ponts de la ville une et une seule fois ? »

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Domaines d'applications

- Chimie :
  - Modélisations des molécules
- Mécanique :
  - Treillis
- Biologie :
  - Réseau de neurones
  - Séquencement du génome
- Sciences sociales :
  - Modélisations des relations
- Et bien sûr dans divers domaines de l'informatique

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Avertissement

- Il faut se méfier de l'apparente simplicité de certains résultats.
- Dans la pratique, la taille des graphes ne permet pas de représentation graphique.

ATTENTION :

Veiller à toujours appliquer les algorithmes présentés même si le résultat peut être trouvé « artisanalement »

Introduction et Définitions

Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Définition : graphe

- Un graphe orienté G c'est un couple (S,A) avec :
  - S un ensemble fini : ensemble des sommets
  - A une relation binaire sur S : ensemble des arcs
- Un graphe NON orienté G c'est un couple (S,A) :
  - S un ensemble fini : ensemble des sommets
  - A paires non ordonnées : ensemble des arêtes

Introduction et Définitions

Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Degré d'un sommet

- Dans un graphe non orienté :
  - On appelle degré d'un sommet : le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes
- Dans un graphe orienté :
  - On appelle degré sortant d'un sommet : le nombre d'arcs qui partent de ce sommet
  - On appelle degré entrant d'un sommet : le nombre d'arcs qui arrivent à ce sommet
  - On appelle degré d'un sommet : la somme des degrés entrant et sortant du sommet

Chemin

- Un chemin d'un sommet u au sommet u' est une séquence de sommets $(v_0, v_1, v_2, \cdots, v_{k-1}, v_k)$ tel que : $u = v_0, u' = v_k$ et $\forall i, (v_{i-1}, v_i) \in A$
- On dit que ce chemin a une longueur k
- Ce chemin est élémentaire ssi $\forall i, j, v_i \neq v_j$
- Un sommet u accessible depuis un sommet v ssi : il existe un chemin du sommet u au sommet v

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Degré d'un sommet

- Dans un graphe orienté :
  - Un chemin $(v_0, v_1, v_2, \cdots, v_k)$ forme un circuit ssi $v_0 = v_k$
  - Ce circuit est élémentaire ssi $\forall i, j \in [1, k-1], v_i \neq v_j$
  - Une boucle est un circuit de longueur 1
  - Un est graphe acyclique ssi il ne contient aucun circuit
- Dans un graphe non orienté :
  - Un chemin $(v_0, v_1, v_2, \cdots, v_k)$ forme un cycle ssi $(v_0 = v_k) \wedge (\forall i, j \in [1, k-1], v_i \neq v_j)$
  - Un graphe est acyclique ssi il ne contient aucun cycle

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Propriétés

- On dit d'un graphe qu'il est :
  - Réflexif ssi : $\forall u_i \in S, (u_i, u_i) \in A$
  - Irréflexif ssi : $\forall u_i \in S, (u_i, u_i) \notin A$
  - Transitif ssi : $\forall u_i, u_j, u_k \in S, (u_i, u_j) \in A \wedge (u_j, u_k) \in A \Rightarrow (u_i, u_k) \in A$
- On dit d'un graphe orienté qu'il est :
  - Symétrique ssi : $\forall u_i, u_j \in S, (u_i, u_j) \in A \Rightarrow (u_j, u_i) \in A$
  - Anti-Symétrique (Assymetrique) ssi : $\forall u_i, u_j \in S, (u_i, u_j) \in A \wedge (u_j, u_i) \in A \Rightarrow u_i = u_j$

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Connexité

- On dit d'un graphe non orienté qu'il est :
  - Connexe ssi pour toute paire de sommets [u,v], il existe une chaîne entre les sommets u et v.
  - Complet ssi tous les sommets sont «reliés» 2 à 2 : $\forall u, v \in S, (u, v) \in A$
- On dit d'un graphe orienté qu'il est :
  - Connexe ssi le graphe non-orienté correspondant est connexe
  - Fortement connexe ssi si pour tout (u,v) il existe un chemin de u à v et de v à u
  - Complet ssi tous les sommets sont «reliés» 2 à 2 : $\forall u, v \in S, ((u, v) \in A) \vee ((v, u) \in A)$

Introduction et Définitions

Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

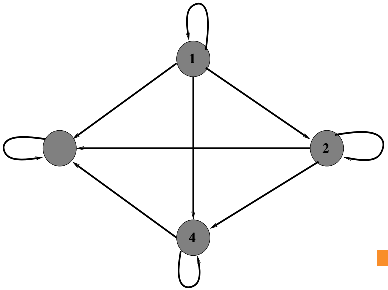
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

K-Connexe

- Un graphe non-orienté est k-connexe ssi :
  - il reste connexe après suppression d'un ensemble quelconque de k-1 arêtes et s'il existe un ensemble de k arêtes qui déconnecte le graphe.
  - autrement dit s'il existe au moins k chaînes indépendantes entre chaque couple de sommets.
- Un graphe orienté est k-connexe ssi :
  - le graphe non-orienté correspondant est k-connexe
- Cette notion est utilisée :
  - en électronique pour le calcul de la fiabilité
  - dans l'étude de jeux de stratégie (cut and connect).

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple



- Ce graphe orienté est :
  - Réfléxif
  - Antisymétrique
  - Transitif
  - Connexe
  - Complet

ATTENTION : Dans un graphe orienté :

- Complet n'implique pas Fortement connexe.

Ex : Il n'y a pas de chemin pour aller de 2 à 1

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Graphes remarquables

- Certains graphes portent des noms particuliers :
  - Biparti=graphe qui peut être partitionné en deux sous ensembles de sommets S1 et S2 tel que : $\forall (u, v) \in A, (u \in S_1 \wedge v \in S_2) \vee (v \in S_1 \wedge u \in S_2)$
- Hypergraphe=graphe non orienté ou chaque arrête est une hyperarête qui relie un sommet à un sous ensemble de sommets.
- Forêt=graphe non orienté acyclique.
- Arbre=graphe connexe non orienté acyclique.

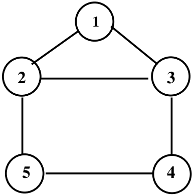
Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

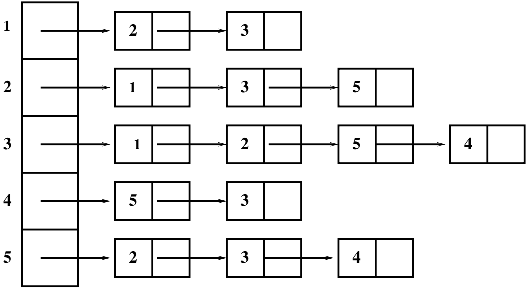
Représentation d'un graphe

- Il existe deux façons de représenter un graphe (S,A) :
  - Liste adjacente : pour les graphes peu denses $Card(A) << (Card(S))^2$
  - Matrice d'incidence : pour les graphes denses $Card(A) \simeq (Card(S))^2$

Liste d'adjacence

- Pour chaque sommet $u \in S$ on a une liste d'adjacence : Adj[u] liste des sommets $v \in S$ tel que $(u, v) \in A$

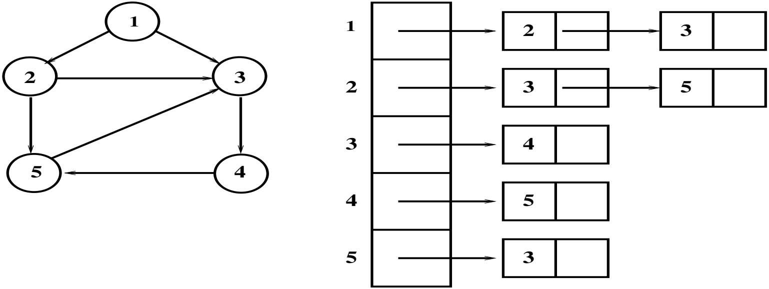




Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Liste d'adjacence

- Pour chaque sommet $u \in S$ on a une liste d'adjacence : Adj[u] liste des sommets $v \in S$ tel que $(u, v) \in A$

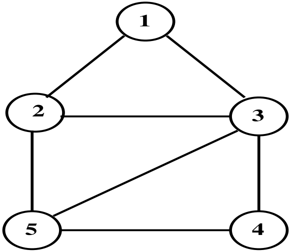


Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Matrice d'adjacence

- Pour un graphe non orienté :

$$\forall i, j \in S \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in A \\ 0 & sinon \end{cases}$$

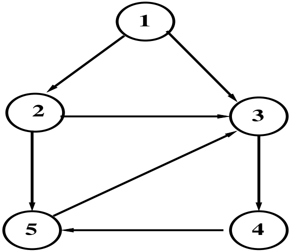


$$Mat(S, A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice d'adjacence

- Pour un graphe non orienté :

$$\forall i, j \in S \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \in A \\ 0 & sinon \end{cases}$$



$$Mat(S, A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Matrice d'incidence arc-sommet

C'est une matrice A, de taille nxm. On associe les sommets aux lignes, et les arcs aux colonnes. L'écriture de cette matrice nécessite la numérotation des arcs ; le choix est laissé à l'utilisateur. On définira donc la matrice de A de la sorte :

- Pour un graphe non orienté :

$$\forall i \in S, \forall j \in S \;\; a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si le sommet i est le sommet origine de l'arc k} \\ -1 & \text{si le sommet i est le sommet de destination de l'arc k} \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Matrice d'incidence arc-sommet

On obtient une matrice très creuse. Cette méthode est donc peu performante. On la présente à des fins théoriques plus qu'algorithmique tant son utilisation se révèle coûteuse et complexe.

Illustration Voici une matrice d'incidence

	1	2	3	4	5
a	1	1	1	0	0
b	-1	0	0	-1	1
c	0	0	-1	0	-1
d	0	-1	0	1	0

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Matrice d'incidence arc-sommet

Voici son expression

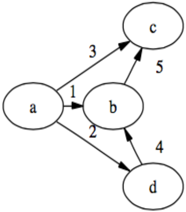


FIGURE: Expression de la matrice d'incidence précédente

Introduction et Définitions

Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Bordure

- On appelle bordure d'un sous-ensemble de sommet S' : L'ensemble des sommets de $V - S'$, où V est l'ensemble des voisins des sommets de S' dans le graphe G.
- Elle est notée : $B(S', G) = V - S' = \{v \in S/(v \notin S') \wedge (\exists s \in S, (s, v) \in A)\}$
- **Rappel :** L'ensemble $\{x/P(x)\} \Leftrightarrow$ l'ensemble des x tels que la condition P(x) soit vraie

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Parcours

- La permutation $L(s_1, \cdots, s_n)$ est un parcours de G ssi : $\forall j \in [1..n], B(L[1, j-1], G) \neq 0 \Rightarrow s_j \in B(L[1, j-1], G)$ avec L[i , j] une sous liste de la permutation L.
- Dans cette définition :
  - L[1, j] : Liste des j sommets déjà visités
  - $L(s_1, \cdots, s_n)$: Un ordre pour parcourir les graphes tel que : Si au moins l'un des sites déjà parcourus a un voisin dans le graphe alors le prochain site visité doit être l'un de ces voisins.

Introduction et Définitions

Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Sommet ouvert ou fermé

- Un sommet s est ouvert dans L[1..i] ssi : $\exists v \in L[i+1..n], (s, v) \in A$

Introduction et Définitions

Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Sommet ouvert ou fermé

- Un sommet s est ouvert dans L[1..i] ssi :
  $\exists v \in L[i+1..n], (s, v) \in A$
- Cette définition signifie :
  Il y a des voisins de s qui n'ont pas encore été visités (dans les i premiers sommets du parcours)

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Sommet ouvert ou fermé

- Un sommet s est ouvert dans L[1..i] ssi :
  $\exists v \in L[i+1..n], (s, v) \in A$
- Cette définition signifie :
  Il y a des voisins de s qui n'ont pas encore été visités (dans les i premiers sommets du parcours)
- Un sommet s est fermé dans L[1..i] ssi :
  $\neg(\exists v \in L[i+1..n], (s, v) \in A) \Leftrightarrow \forall v \in L[i+1..n], (s, v) \notin A$

Introduction et Définitions

Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Sommet ouvert ou fermé

- Un sommet s est ouvert dans L[1..i] ssi :
  $\exists v \in L[i+1..n], (s, v) \in A$
- Cette définition signifie :
  Il y a des voisins de s qui n'ont pas encore été visités (dans les i premiers sommets du parcours)
- Un sommet s est fermé dans L[1..i] ssi :
  $\neg(\exists v \in L[i+1..n], (s, v) \in A) \Leftrightarrow \forall v \in L[i+1..n], (s, v) \notin A$
- Cette définition signifie :
  Tous les voisins de s ont déjà été visités (dans les i premiers sommets du parcours)

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Parcours en largeur BFS

- On appelle parcours en largeur - **Breadth First Search** Un parcours où pour tout sommet $s_i \in L[1..i]$ le prédécesseur est le premier sommet ouvert dans L[1..i-1]

Parcours en largeur BFS

- On appelle parcours en largeur - **Breadth First Search** Un parcours où pour tout sommet $s_i \in L[1..i]$ le prédécesseur est le premier sommet ouvert dans L[1..i-1]
- Cette définition signifie :
  Lorsque l'on a visité j-1 sommets le prochain sommet est un voisin du premier site déjà visité qui a encore au moins un voisin non visité.

Introduction et Définitions

Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Parcours en largeur BFS

- On appelle parcours en largeur - **Breadth First Search**
  Un parcours où pour tout sommet $s_i \in L[1..i]$ le prédécesseur est le premier sommet ouvert dans L[1..i-1]
- Cette définition signifie :
  Lorsque l'on a visité j-1 sommets le prochain sommet est un voisin du premier site déjà visité qui a encore au moins un voisin non visité.
- Autrement dit :
  A chaque étape du parcours on visite tous les voisins non visités des sites visités à l'étape précédente.

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Parcours en profondeur DFS

- On appelle parcours en profondeur - **Depth First Search** Un parcours où pour tout sommet $s_i \in L[1..i]$ le prédécesseur est le dernier sommet ouvert dans L[1..i-1]

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Parcours en profondeur DFS

- On appelle parcours en profondeur - **Depth First Search**
  Un parcours où pour tout sommet $s_i \in L[1..i]$ le prédécesseur est le dernier sommet ouvert dans L[1..i-1]
- Cette définition signifie :
  Lorsque l'on a visité j-1 sommets le prochain sommet est un voisin du dernier site déjà visité qui a encore au moins un voisin non visité.

Introduction et Définitions

Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Parcours en profondeur DFS

- On appelle parcours en profondeur - **Depth First Search**
  Un parcours où pour tout sommet $s_i \in L[1..i]$ le prédécesseur est le dernier sommet ouvert dans L[1..i-1]
- Cette définition signifie :
  Lorsque l'on a visité j-1 sommets le prochain sommet est un voisin du dernier site déjà visité qui a encore au moins un voisin non visité.
- Autrement dit :
  On descend le plus possible dans le parcours. Quand on ne peut plus on remonte le moins possible

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

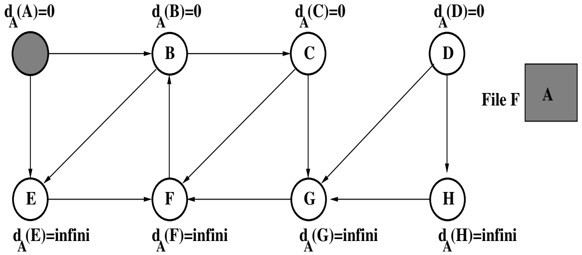
Algorithme BFS

BFS(graphe G, sommet s)
POUR CHAQUE $v \neq s$ **FAIRE**
$couleur(v) \leftarrow Blanc; distance(v) \leftarrow \infty$
$couleur(s) \leftarrow Rouge\,;\, distance(s) \leftarrow 0$
$F \leftarrow \{s\}$
TANT-QUE non FileVide(F) **FAIRE**
    $s \leftarrow$ Défiler(F)
    POUR CHAQUE $v \in Adj[s]$
        SI couleur(v) = Blanc **ALORS**
            $couleur(v) \leftarrow Rouge$
            $distance(v) \leftarrow distance(s) + 1$
            $pre(v) \leftarrow s$
            Enfiler(F,v)
        FIN SI
    FIN POUR
    $couleur(s) \leftarrow Noir$
FIN-TANT-QUE

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme BFS

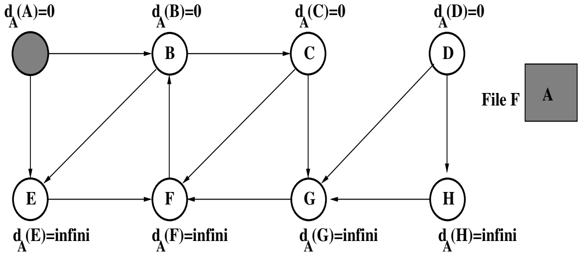
- A l'état initial :



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

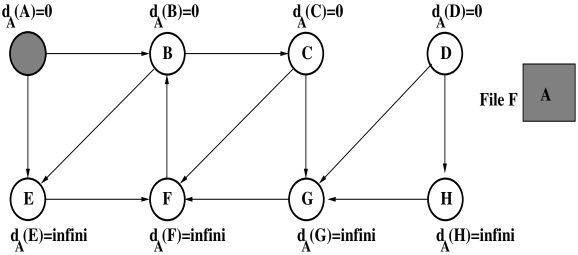
Exemple de l'algorithme BFS

- A l'état initial :
  - seul le sommet A est rouge



Exemple de l'algorithme BFS

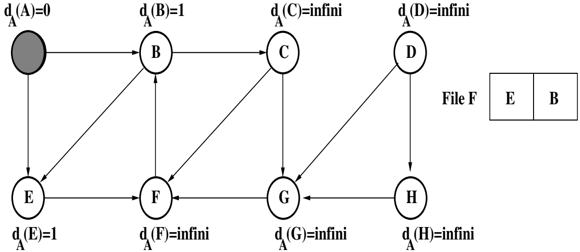
- A l'état initial :
  - seul le sommet A est rouge
  - La file est réduite au site A



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

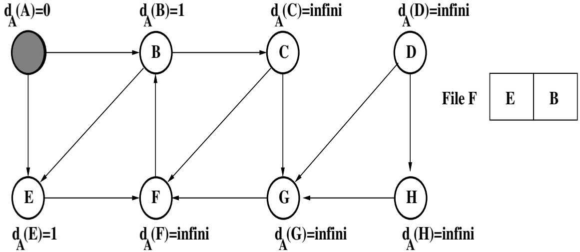
Exemple de l'algorithme BFS

- On défile le sommet A



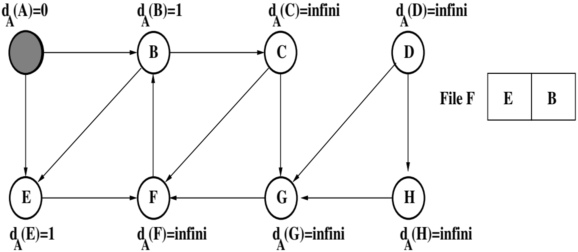
Exemple de l'algorithme BFS

- On défile le sommet A
- On visite les voisins blancs de A : B et E



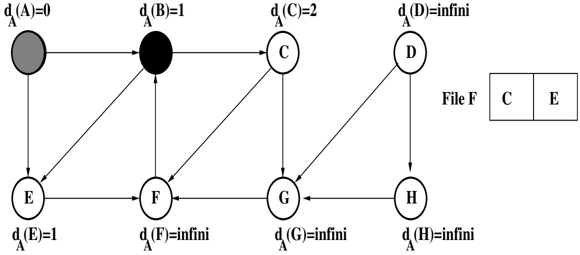
Exemple de l'algorithme BFS

- On défile le sommet A
- On visite les voisins blancs de A : B et E
- Le site A devient noir



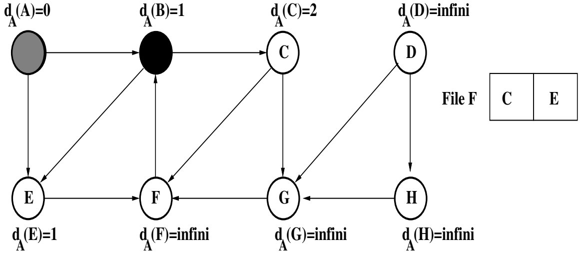
Exemple de l'algorithme BFS

- On défile le sommet B



Exemple de l'algorithme BFS

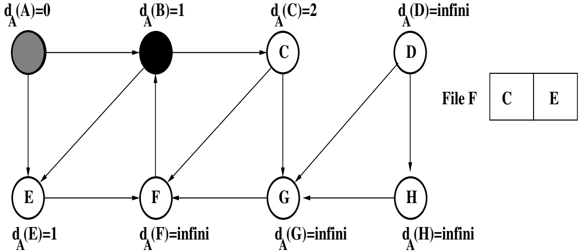
- On défile le sommet B
- On visite le voisin blanc de B : C



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme BFS

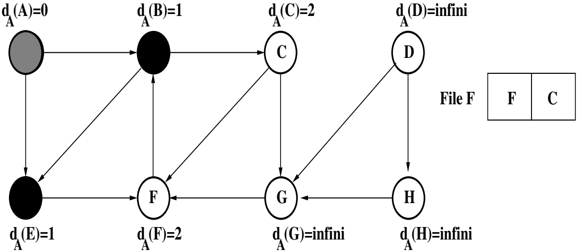
- On défile le sommet B
- On visite le voisin blanc de B : C
- Le site B devient noir



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme BFS

- On défile le sommet E



Introduction et Définitions

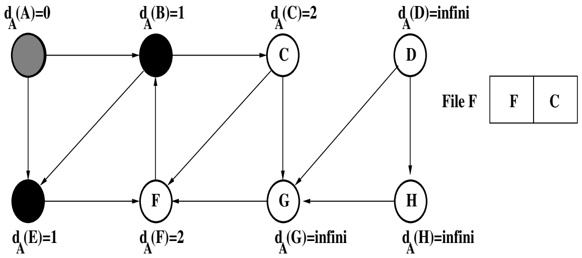
Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme BFS

- On défile le sommet E
- On visite le voisin blanc de B : F



Introduction et Définitions

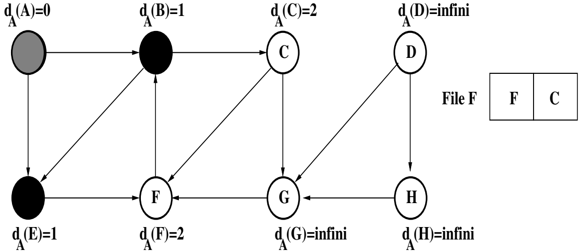
Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme BFS

- On défile le sommet E
- On visite le voisin blanc de B : F
- Le site B devient noir



Introduction et Définitions

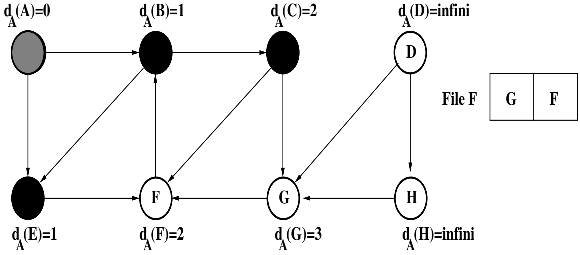
Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

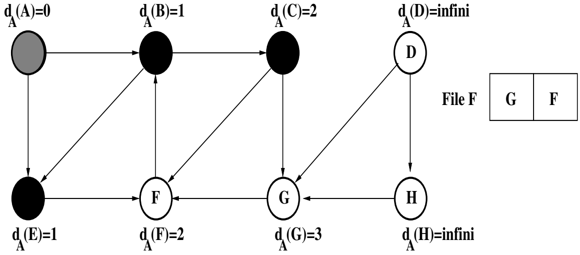
Exemple de l'algorithme BFS

- On défile le sommet C



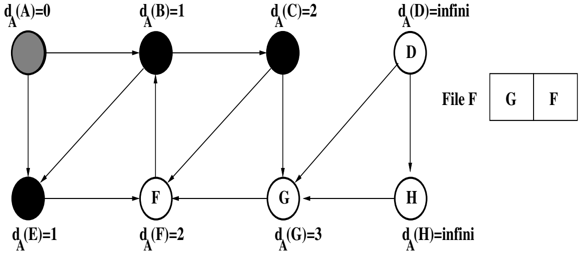
Exemple de l'algorithme BFS

- On défile le sommet C
- On visite le voisin blanc de C : G



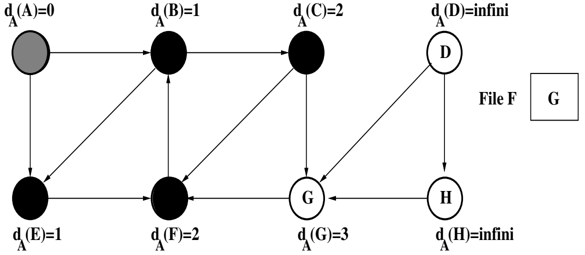
Exemple de l'algorithme BFS

- On défile le sommet C
- On visite le voisin blanc de C : G
- Le site C devient noir



Exemple de l'algorithme BFS

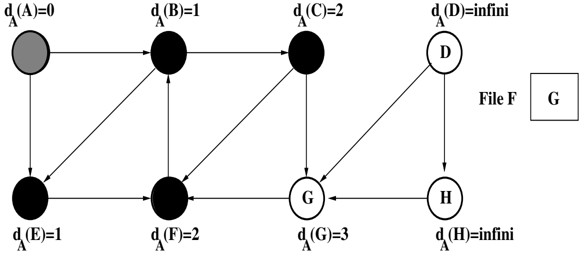
- On défile le sommet F



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme BFS

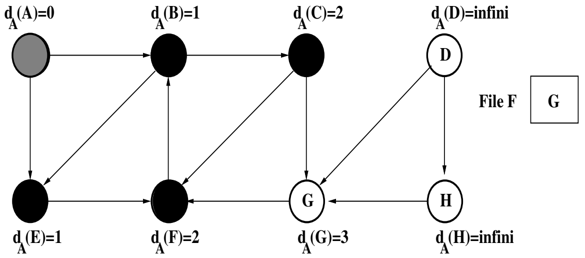
- On défile le sommet F
- F n'a pas de voisin blanc



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme BFS

- On défile le sommet F
- F n'a pas de voisin blanc
- Le site F devient noir



Introduction et Définitions

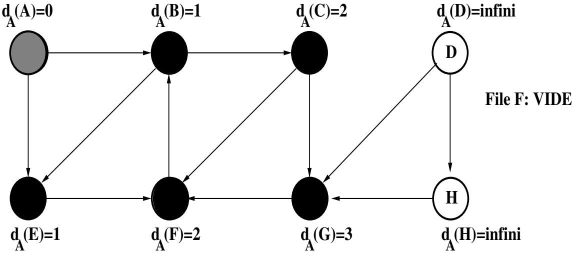
Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme BFS

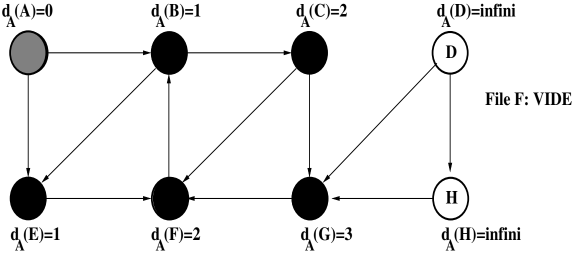
- On défile le sommet G



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme BFS

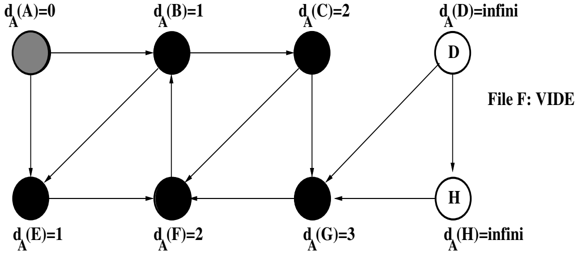
- On défile le sommet G
- G n'a pas de voisin blanc



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme BFS

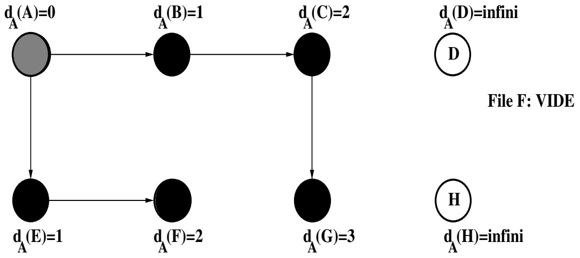
- On défile le sommet G
- G n'a pas de voisin blanc
- Le site G devient noir



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme BFS

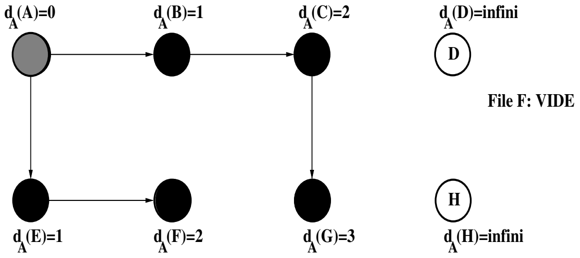
- Il n'y a plus de sommet à défiler : Fin de l'algorithme



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme BFS

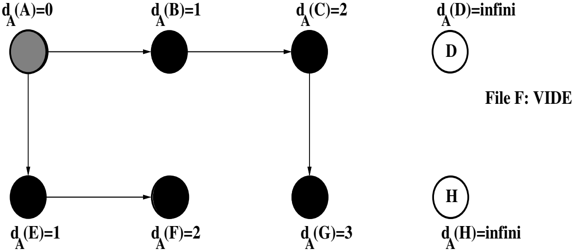
- Il n'y a plus de sommet à défiler : Fin de l'algorithme
- On obtient une arborescence en largeur



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme BFS

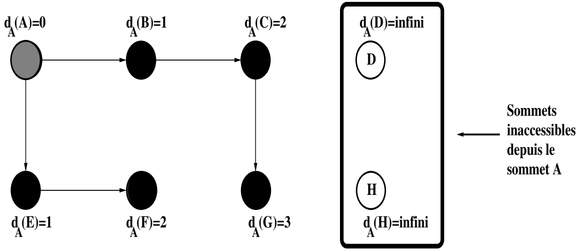
- Il n'y a plus de sommet à défiler : Fin de l'algorithme
- On obtient une arborescence en largeur
- $v \in S, d_A(V) =$ longueur du **plus court chemin** entre A et V



Exemple de l'algorithme BFS

ATTENTION :

Dans un parcours en largeur : tous les sommets ne sont pas visités. Ainsi les sites inaccessibles depuis l'origine gardent une distance ∞.



Initialisation BFS

VARIABLE

date : un compteur d'étape

DFS_run(graphe G)

POUR CHAQUE $\sigma \in S$ **FAIRE**

$couleur(s) \leftarrow Blanc$

FIN POUR

$date \leftarrow 0$

POUR CHAQUE $s \in S$ **FAIRE**

SI couleur(s)=Blanc **ALORS**

DFS(G,s)

FIN SI

FIN POUR

Introduction et Définitions

Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Algorithme récursif BFS

DFS(graphe G, sommet s)

$couleur(s) \leftarrow Rouge$

$dateDebut(s) \leftarrow inc(date)$

POUR CHAQUE $v \in Adj[s]$

SI couleur(v)=Blanc **ALORS**

$pre(v) \leftarrow s$

DFS(G,v)

FIN SI

FIN POUR

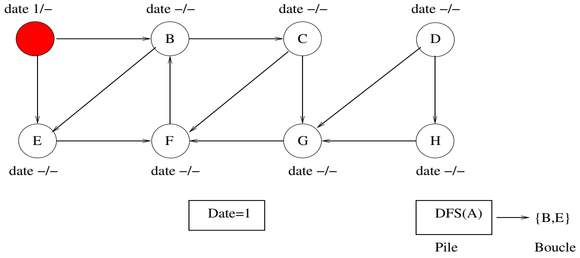
$couleur(s) \leftarrow Noir$

$dateFin(s) \leftarrow inc(date)$

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

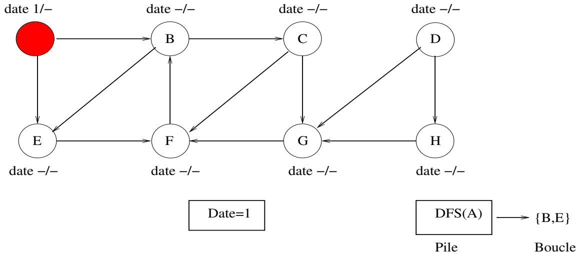
Exemple de l'algorithme DFS

- La fonction DFS_run() appelle DFS(A).



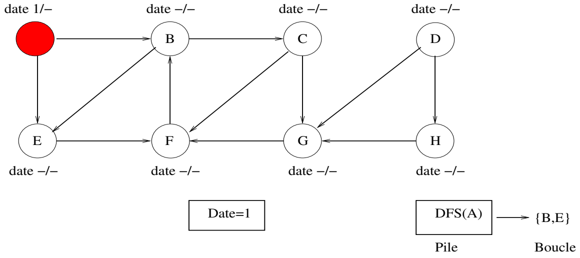
Exemple de l'algorithme DFS

- La fonction DFS_run() appelle DFS(A).
- Seul le sommet A est rouge



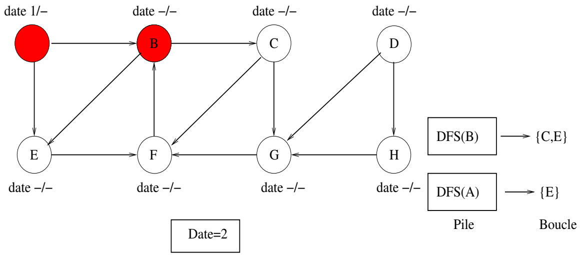
Exemple de l'algorithme DFS

- La fonction DFS_run() appelle DFS(A).
- Seul le sommet A est rouge
- La pile des appels de fonction est réduite au DFS(A)



Exemple de l'algorithme DFS

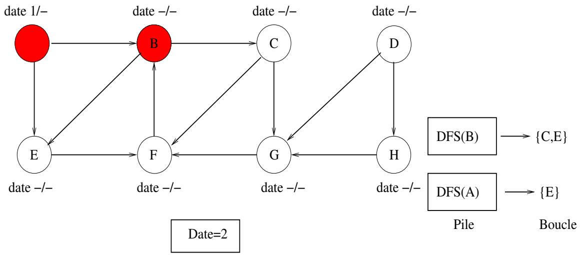
- On empile la fonction DFS(B)



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme DFS

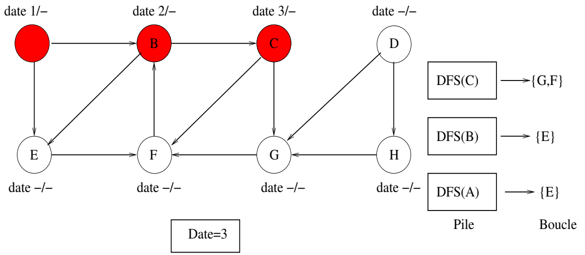
- On empile la fonction DFS(B)
- B devient rouge et on note la date : $dateDebut(B) \leftarrow 2$



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme DFS

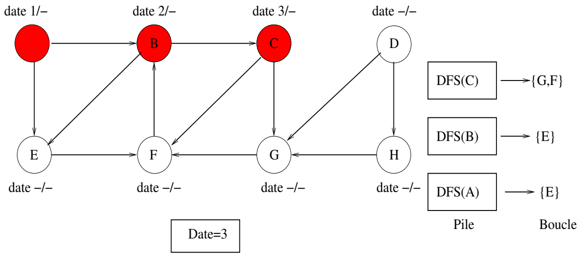
- On empile la fonction DFS(C)



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

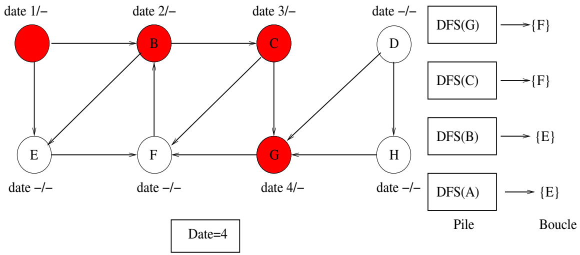
Exemple de l'algorithme DFS

- On empile la fonction DFS(C)
- C devient rouge et on note la date : $dateDebut(B) \leftarrow 3$



Exemple de l'algorithme DFS

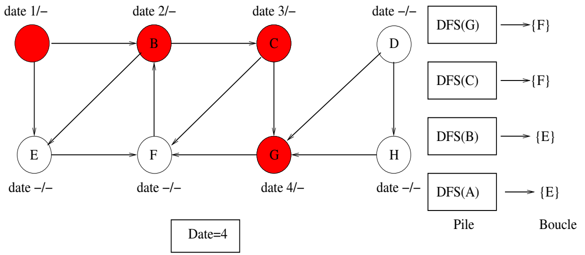
- On empile la fonction DFS(G)



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme DFS

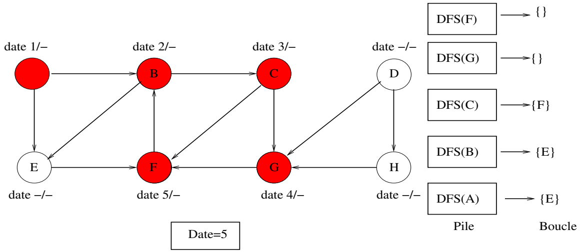
- On empile la fonction DFS(G)
- G devient rouge et on note la date : $dateDebut(G) \leftarrow 4$



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme DFS

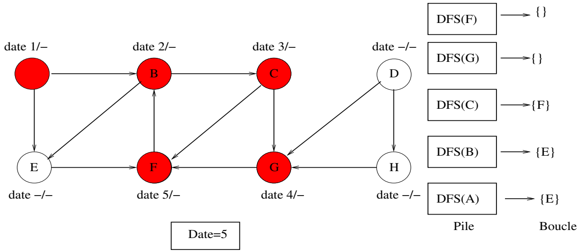
- On empile la fonction DFS(F)



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme DFS

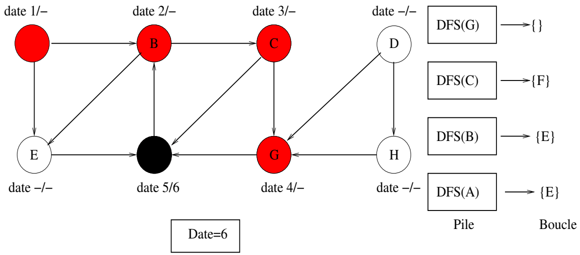
- On empile la fonction DFS(F)
- F devient rouge et on note la date : $dateDebut(F) \leftarrow 5$



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme DFS

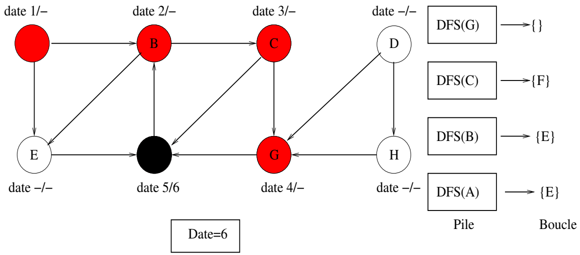
- Fin de la boucle dans la fonction DFS(F)



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme DFS

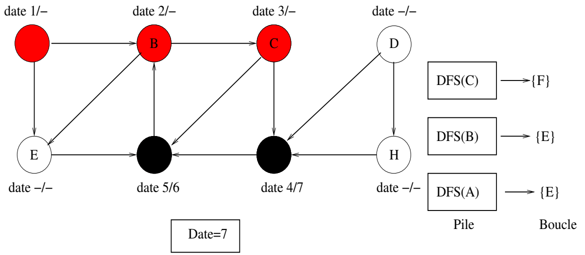
- Fin de la boucle dans la fonction DFS(F)
- F devient noir et on note la date : $dateFin(F) \leftarrow 6$



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

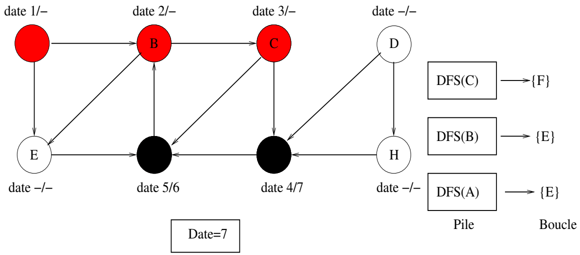
Exemple de l'algorithme DFS

- Fin de la boucle dans la fonction DFS(G)



Exemple de l'algorithme DFS

- Fin de la boucle dans la fonction DFS(G)
- F devient noir et on note la date : $dateFin(G) \leftarrow 7$



Introduction et Définitions

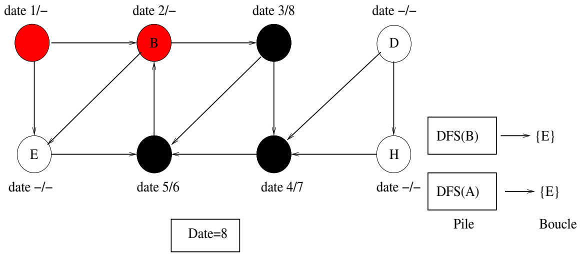
Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

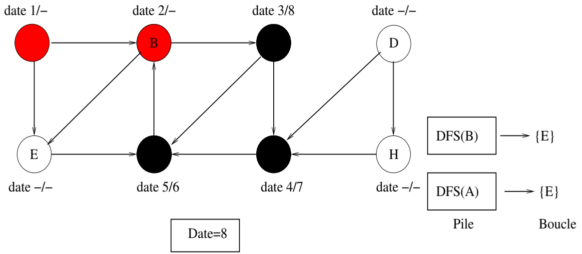
Exemple de l'algorithme DFS

- Le sommet F n'est pas blanc $\Rightarrow$ pas d'appel à DFS(F)



Exemple de l'algorithme DFS

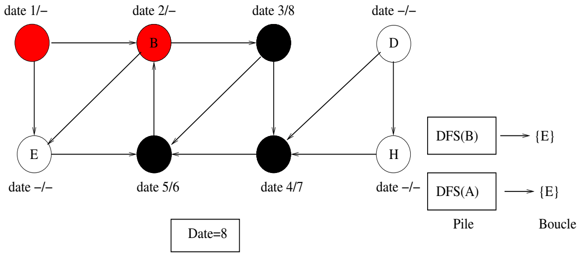
- Le sommet F n'est pas blanc ⇒ pas d'appel à DFS(F)
- Fin de la boucle dans la fonction DFS(G)



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme DFS

- Le sommet F n'est pas blanc $\Rightarrow$ pas d'appel à DFS(F)
- Fin de la boucle dans la fonction DFS(G)
- G devient noir et on note la date : $dateFin(C) \leftarrow 8$



Introduction et Définitions

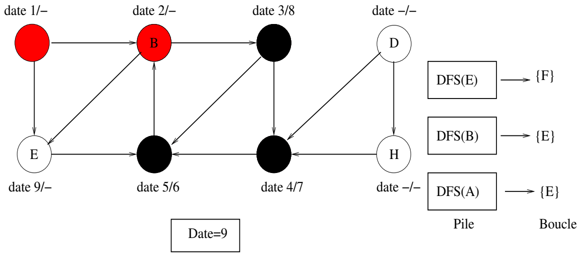
Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme DFS

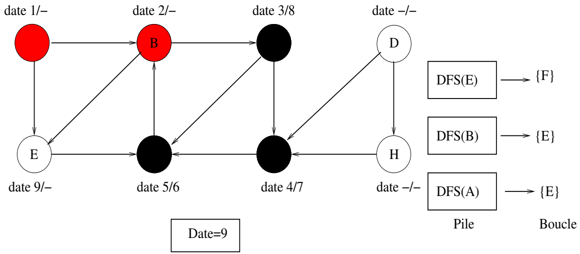
- Retour à la boucle dans la fonction DFS(B)



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme DFS

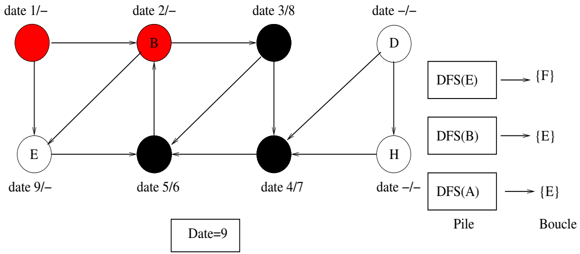
- Retour à la boucle dans la fonction DFS(B)
- On empile la fonction DFS(E)



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme DFS

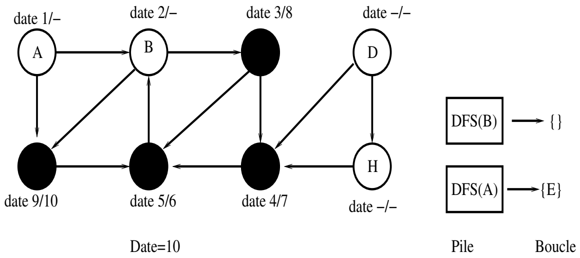
- Retour à la boucle dans la fonction DFS(B)
- On empile la fonction DFS(E)
- E devient rouge et on note la date : $dateFin(E) \leftarrow 9$



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

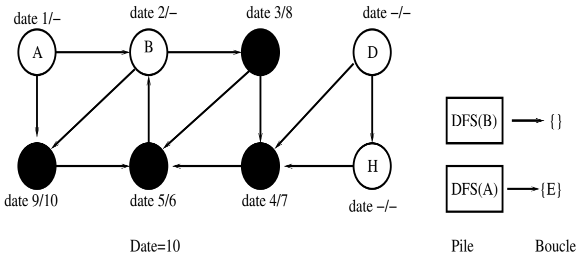
Exemple de l'algorithme DFS

- Le sommet F n'est pas blanc ⇒ pas d'appel à DFS(E)



Exemple de l'algorithme DFS

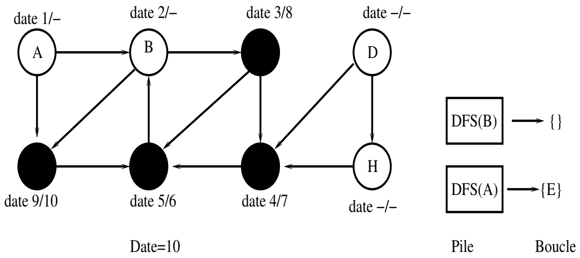
- Le sommet F n'est pas blanc $\Rightarrow$ pas d'appel à DFS(E)
- Fin de la boucle dans la fonction DFS(E)



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme DFS

- Le sommet F n'est pas blanc $\Rightarrow$ pas d'appel à DFS(E)
- Fin de la boucle dans la fonction DFS(E)
- E devient noir et on note la date : $dateFin(E) \leftarrow 10$



Introduction et Définitions

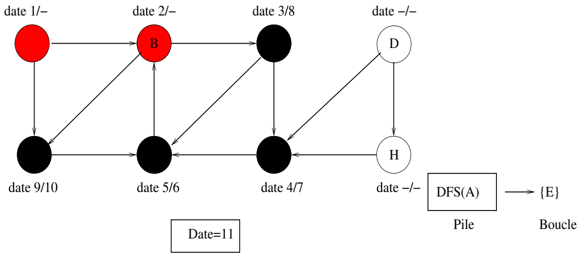
Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme DFS

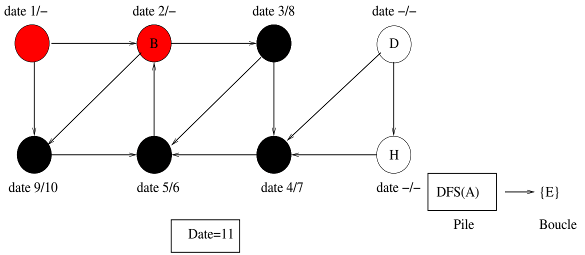
- Fin de la boucle dans la fonction DFS(B)



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme DFS

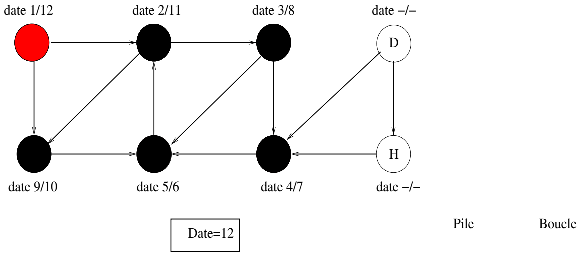
- Fin de la boucle dans la fonction DFS(B)
- B devient noir et on note la date : $dateFin(B) \leftarrow 11$



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme DFS

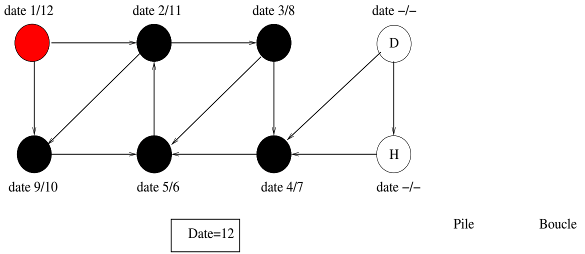
- Le sommet E n'est pas blanc $\Rightarrow$ pas d'appel à DFS(A)



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme DFS

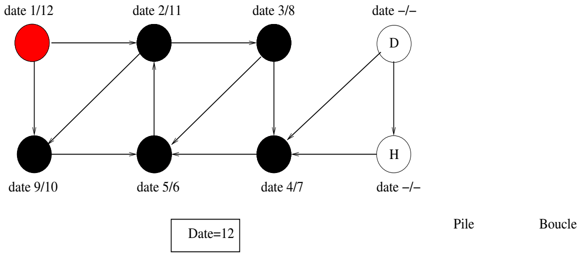
- Le sommet E n'est pas blanc ⇒ pas d'appel à DFS(A)
- Fin de la boucle dans la fonction DFS(A)



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme DFS

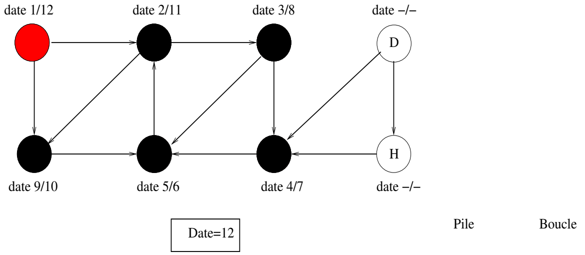
- Le sommet E n'est pas blanc $\Rightarrow$ pas d'appel à DFS(A)
- Fin de la boucle dans la fonction DFS(A)
- A devient noir et on note la date : $dateFin(A) \leftarrow 12$



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme DFS

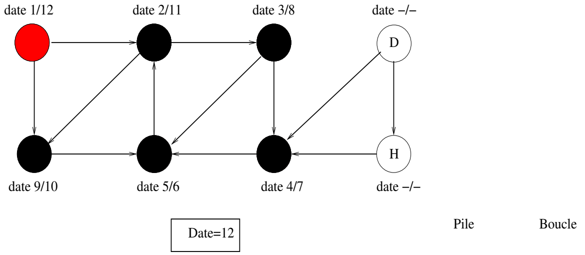
- L'appel à la fonction DFS(A) est terminée



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme DFS

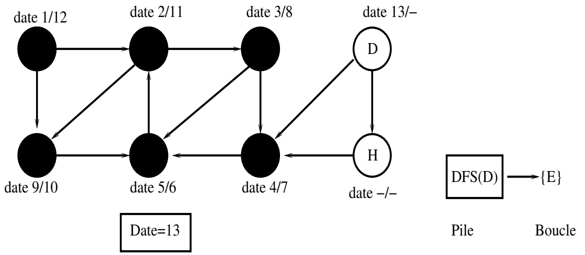
- L'appel à la fonction DFS(A) est terminée
- La boucle principale de DFS_run() appelle ensuite DFS(A) et DFS(B) qui se terminent tout de suite : "pas de voisins blanc"



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

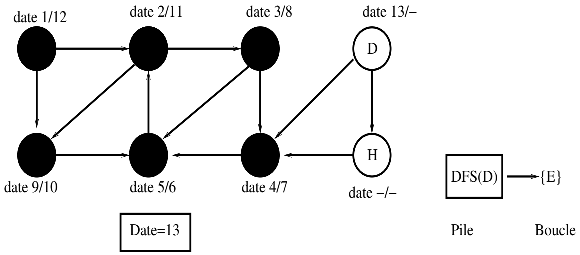
Exemple de l'algorithme DFS

- On empile la fonction DFS(D)



Exemple de l'algorithme DFS

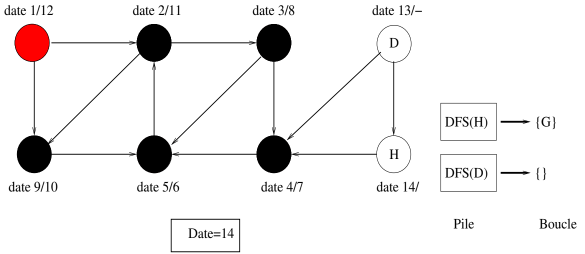
- On empile la fonction DFS(D)
- F devient rouge et on note la date : $dateDebut(F) \leftarrow 13$



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

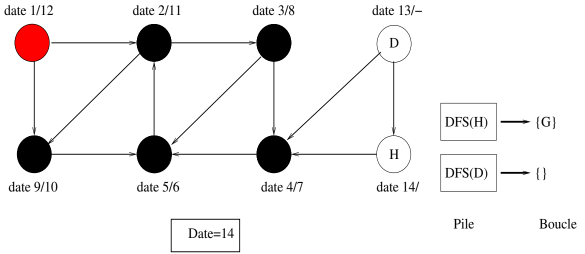
Exemple de l'algorithme DFS

- Le sommet G n'est pas blanc $\Rightarrow$ pas d'appel à DFS(G)



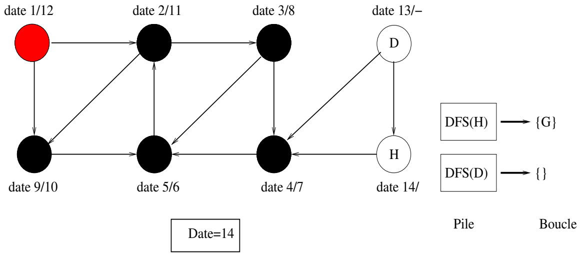
Exemple de l'algorithme DFS

- Le sommet G n'est pas blanc $\Rightarrow$ pas d'appel à DFS(G)
- On empile la fonction DFS(H)



Exemple de l'algorithme DFS

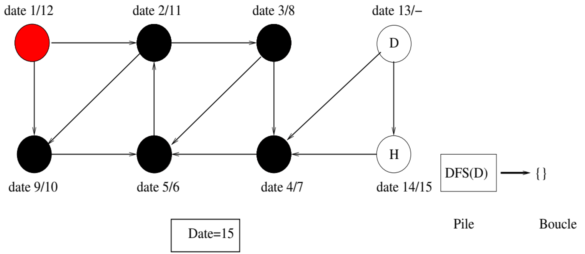
- Le sommet G n'est pas blanc $\Rightarrow$ pas d'appel à DFS(G)
- On empile la fonction DFS(H)
- H devient rouge et on note la date : $dateDebut(H) \leftarrow 14$



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme DFS

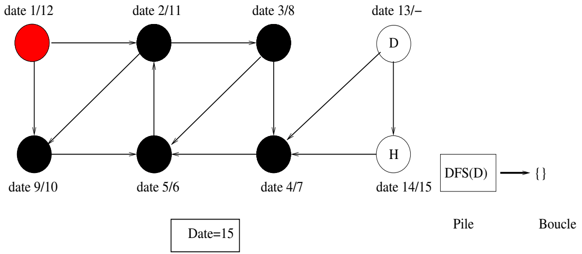
- Le sommet G n'est pas blanc $\Rightarrow$ pas d'appel à DFS(G)



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme DFS

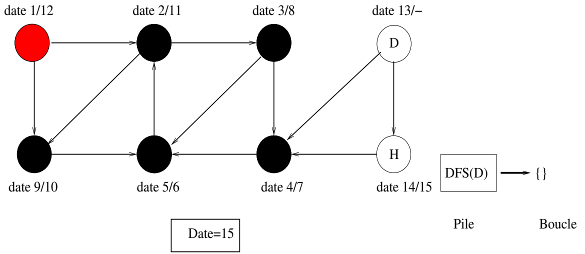
- Le sommet G n'est pas blanc ⇒ pas d'appel à DFS(G)
- Fin de la boucle dans la fonction DFS(H)



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme DFS

- Le sommet G n'est pas blanc $\Rightarrow$ pas d'appel à DFS(G)
- Fin de la boucle dans la fonction DFS(H)
- H devient noir et on note la date : $dateFin(H) \leftarrow 15$



Introduction et Définitions

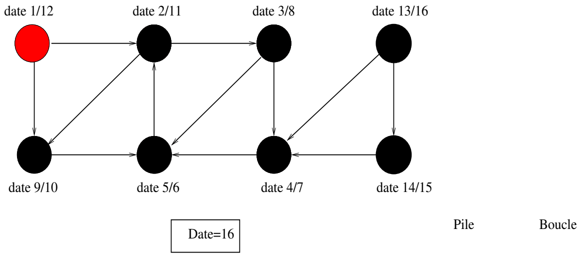
Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme DFS

- Fin de la boucle dans la fonction DFS(H)



Introduction et Définitions

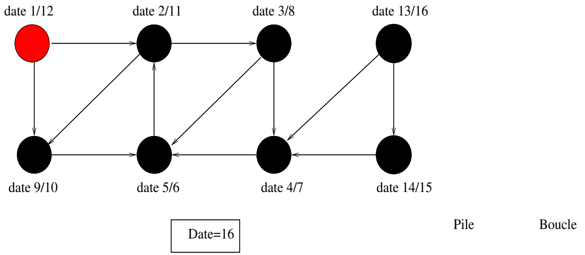
Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de l'algorithme DFS

- Fin de la boucle dans la fonction DFS(H)
- H devient noir et on note la date : $dateFin(H) \leftarrow 16$



Introduction et Définitions

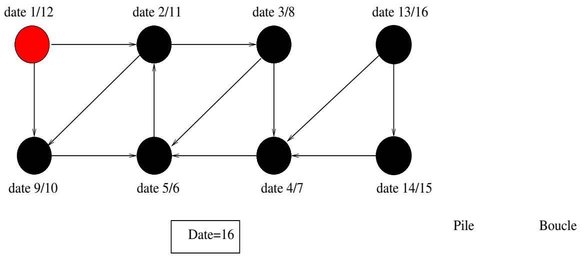
Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

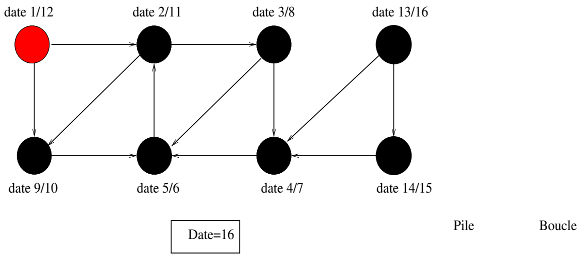
Exemple de l'algorithme DFS

- Toutes les fonctions lancées par DFS_init() avortent



Exemple de l'algorithme DFS

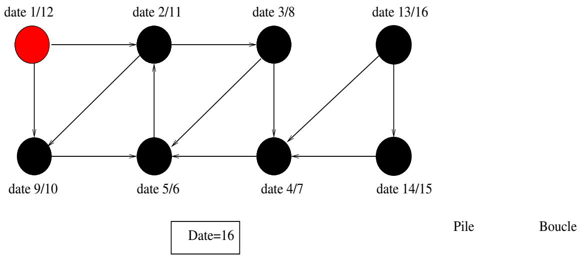
- Toutes les fonctions lancées par DFS_init() avortent
- Parcours en profondeur ⇒ tous les sommets sont visités



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

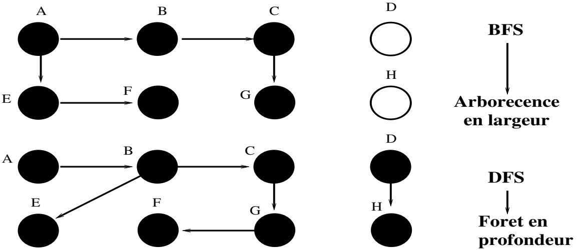
Exemple de l'algorithme DFS

- Toutes les fonctions lancées par DFS_init() avortent
- Parcours en profondeur ⇒ tous les sommets sont visités
- On obtient en **forêt en profondeur**



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Comparaison BFS et DFS



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Théorème des parenthèses

- Les dates de découvertes et fin de traitement ont : une structure parenthèsée
- Théorèmes :
  $\forall u, v \in S$ une seule des 3 propositions suivantes est vraie :
  - $[dbut[u], fin[u]] \cap [dbut[v], fin[v]] = \emptyset$

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Théorème des parenthèses

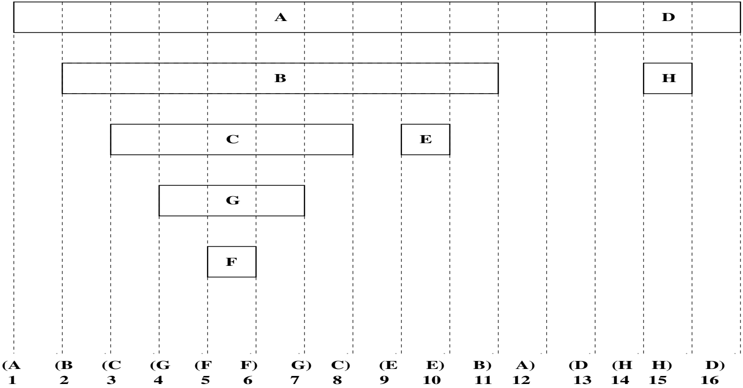
- Les dates de découvertes et fin de traitement ont : une structure parenthèsée
- Théorèmes :
  $\forall u, v \in S$ une seule des 3 propositions suivantes est vraie :
  - $[dbut[u], fin[u]] \cap [dbut[v], fin[v]] = \emptyset$
  - $[dbut[u], fin[u]] \subset [dbut[v], fin[v]]$
    ET u descendant de v dans une arborescence de la foret

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Théorème des parenthèses

- Les dates de découvertes et fin de traitement ont : une structure parenthèsée
- Théorèmes :
  $\forall u, v \in S$ une seule des 3 propositions suivantes est vraie :
  - $[dbut[u], fin[u]] \cap [dbut[v], fin[v]] = \emptyset$
  - $[dbut[u], fin[u]] \subset [dbut[v], fin[v]]$
    ET u descendant de v dans une arborescence de la foret
  - $[dbut[v], fin[v]] \subset [dbut[u], fin[u]]$
    ET v descendant de u dans une arborescence de la foret

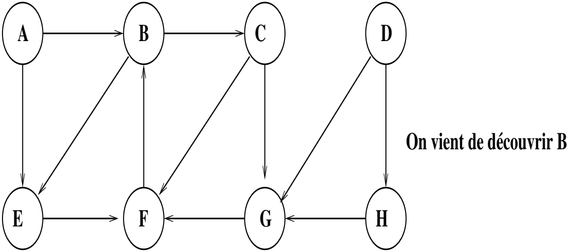
Théorème des parenthèses



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Théorème du chemin blanc

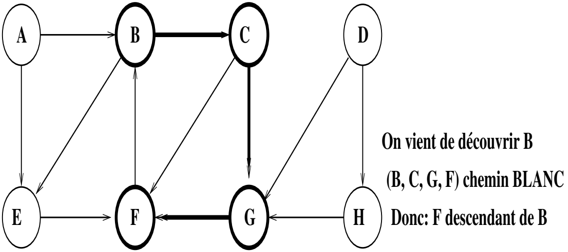
- Théorèmes :
  Dans une foret en profondeur, un sommet u est un descendant d'un sommet v si seulement si : lorsque l'on découvre u(dateDebut[u]), il existe un **chemin de sommet BLANC** entre u et v



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

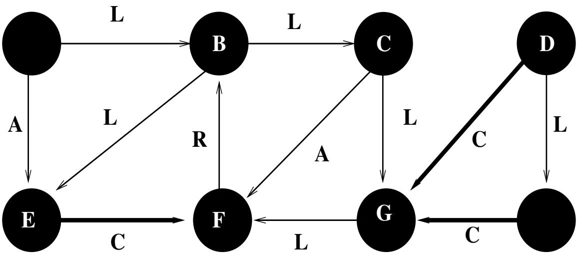
Théorème du chemin blanc

- Théorèmes :
  Dans une foret en profondeur, un sommet u est un descendant d'un sommet v si seulement si : lorsque l'on découvre u(dateDebut[u]), il existe un **chemin de sommet BLANC** entre u et v



Classement des arcs

- Un arc (u,v) est appelé :
  - **arc de liaison :** les arcs de la forêt en profondeur
  - **arc de retour :** si v est un des ancêtres de u
  - **arc avant :** si u est un des ancêtres de v ET qu'il n'est pas un arc de liaison
  - **arc couvrant :** tous les autres



Introduction et Définitions

Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Théorème des arcs en retour

Théorème

Un graphe orienté est acyclique sssi : un parcours en profondeur de G ne génère pas d'arc retour

Preuve :

- (**Acyclique** $\Rightarrow$ **Pas d'arc de retour**) $\Leftrightarrow$ (arc de retour $\Rightarrow$ cycle)

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Théorème des arcs en retour

Théorème

Un graphe orienté est acyclique sssi : un parcours en profondeur de G ne génère pas d'arc retour

Preuve :

- (**Acyclique** $\Rightarrow$ **Pas d'arc de retour**) $\Leftrightarrow$ (arc de retour $\Rightarrow$ cycle)
  - Soit (u,v) un arc retour $\Rightarrow$ v est un ancêtre de u
    $\Rightarrow$ il existe un chemin de v à u
    $\Rightarrow$ ce chemin et (u,v) forme un cycle

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Théorème des arcs en retour
Preuve :

- (**Pas d'arc de retour** $\Rightarrow$ **acyclique**) $\Leftrightarrow$ (cycle $\Rightarrow$ arc de retour)

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Théorème des arcs en retour
Preuve :

- (**Pas d'arc de retour** $\Rightarrow$ **acyclique**) $\Leftrightarrow$ (cycle $\Rightarrow$ arc de retour)
  - Soit C un cycle et v le premier sommet de C visité dans le parcours. On note (u,v) l'arc du cycle qui conduit à v

Introduction et Définitions

Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Théorème des arcs en retour

Preuve :

- (**Pas d'arc de retour** $\Rightarrow$ **acyclique**) $\Leftrightarrow$ (cycle $\Rightarrow$ arc de retour)
  - Soit C un cycle et v le premier sommet de C visité dans le parcours. On note (u,v) l'arc du cycle qui conduit à v
  - v premier sommet visité $\Rightarrow$ les autres sommets de C sont blancs
    $\Rightarrow$ u descendant de v (Th. chemin blanc)
    $\Rightarrow$ (u,v) est un arc retour

Introduction et Définitions

Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Algorithme de décomposition

- On cherche ici à décomposer un graphe orienté en composantes fortement connexes
- L'algorithme utilise : un double parcours en profondeur

Décomposition (graphe G)

DFS_run(G)

Calculer ${}^tG$: transposé de G (inversion du sens de tous les arcs) DFS_run(${}^tG$) dans la boucle principale qui appelle DFS(s), on parcourt les sommets par ordre décroissant des dateFin calculées lors du premier DFS(G)

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de décomposition

- On cherche ici à décomposer un graphe orienté en composantes fortement connexes
- L'algorithme utilise : un double parcours en profondeur

Décomposition (graphe G)

DFS_run(G)
Calculer ${}^tG$: transposé de G (inversion du sens de tous les arcs) DFS_run(${}^tG$) dans la boucle principale qui appelle DFS(s), on parcourt les sommets par ordre décroissant des dateFin calculées lors du premier DFS(G)

Introduction et Définitions

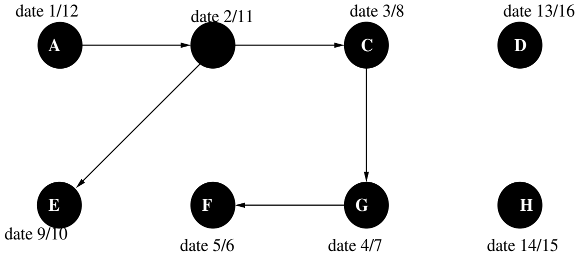
Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de décomposition

- A la fin du premier appel DFS (G), on obtient :

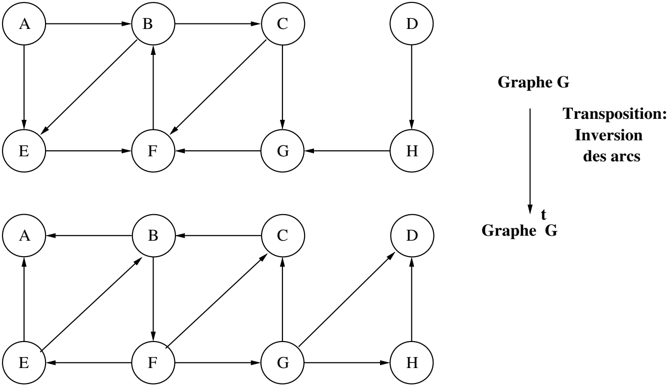


- On ordonne les sommets suivants dateFin (décroissant) : D - H - A - B - E - C - G - F
- C'est l'ordre qui sera utilisé dans la boucle du 2^{me} DFS_run

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de décomposition

- On inverse les arcs pour obtenir : le graphe transposé



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de décomposition

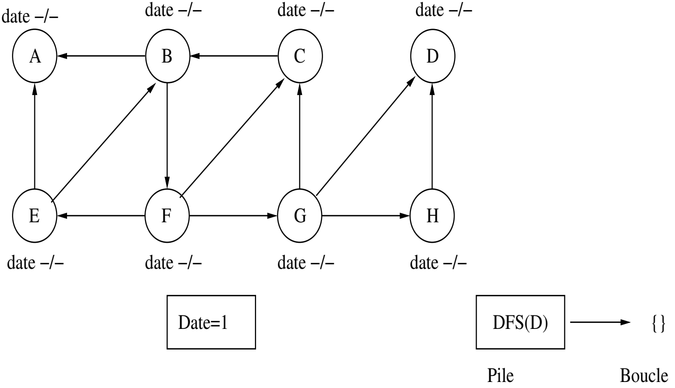
- La transposition est une opération matricielle
- La matrice d'adjacente du graphe transposé ${}^tG$ est : la transposée de la matrice d'adjacence du graphe G
- L'inversion de l'arc $\vec{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{23} = 0 \\ a_{32} = 1 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

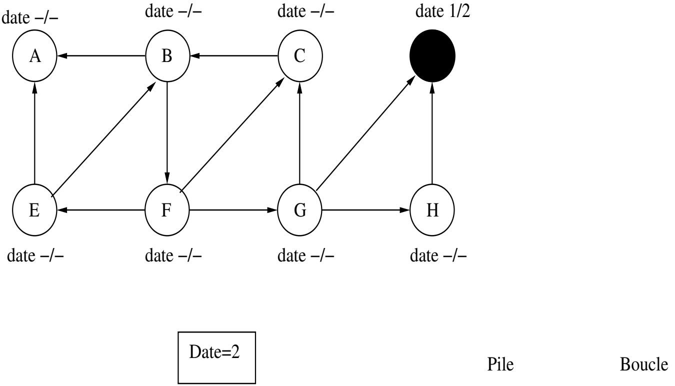
Exemple de décomposition

- On lance une deuxième fois le parcours en profondeur
- D est le premier sommet dans la boucle de DFS_run()
- Appel à DFS(D) ; D devient rouge



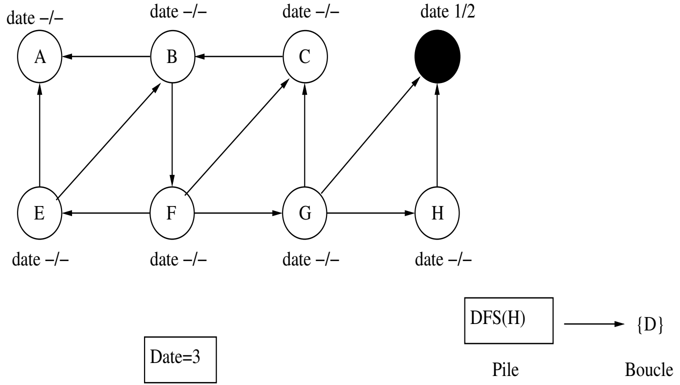
Exemple de décomposition

- D n'a pas de voisins blancs
- D devient noir
- Fin du 1er appel de DFS() dans la boucle de DFS_run()



Exemple de décomposition

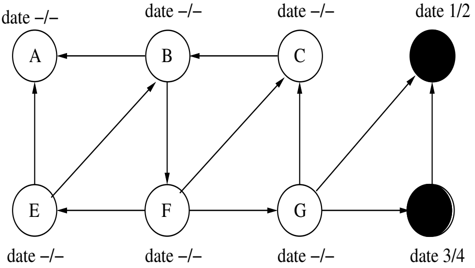
- H est le 2^{me} sommet dans la boucle de DFS_run()
- Appel à DFS(H) ; H devient rouge



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de décomposition

- H n'a pas de voisins blancs
- H devient noir
- Fin du 2ème appel de DFS() dans la boucle de DFS_run



Date=4

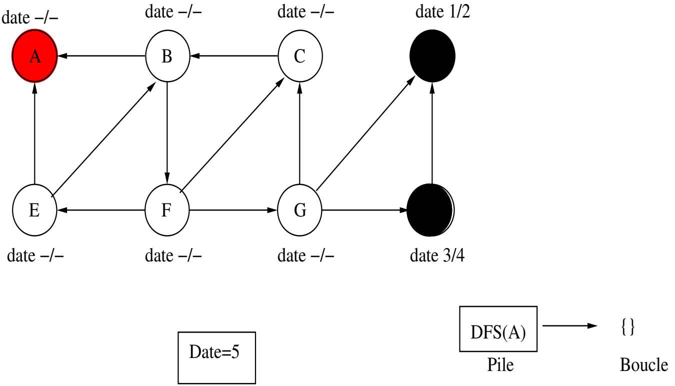
Pile

Boucle

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

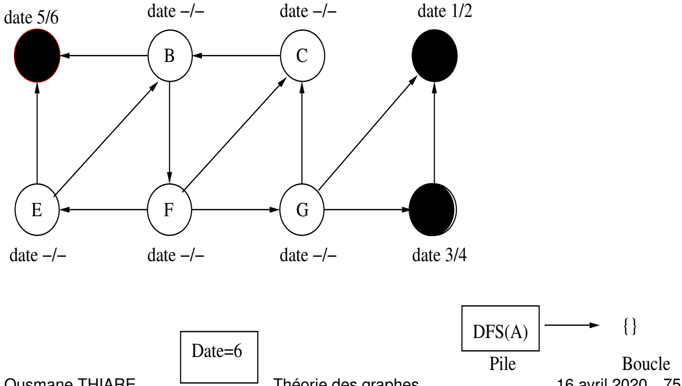
Exemple de décomposition

- A est le 3ème sommet dans la boucle de DFS_run()
- Appel à DFS(A)
- A devient rouge



Exemple de décomposition

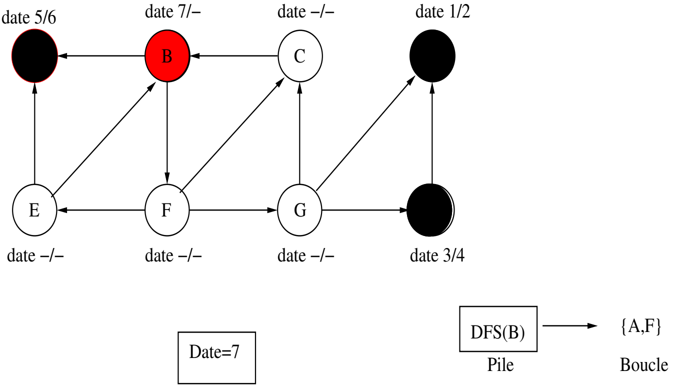
- A n'a pas de voisins blancs
- A devient noir
- Fin du 3ème appel de DFS() dans la boucle de DFS_run()



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de décomposition

- A est le 4ème sommet dans la boucle de DFS_run()
- Appel à DFS(B)
- B devient rouge



Introduction et Définitions

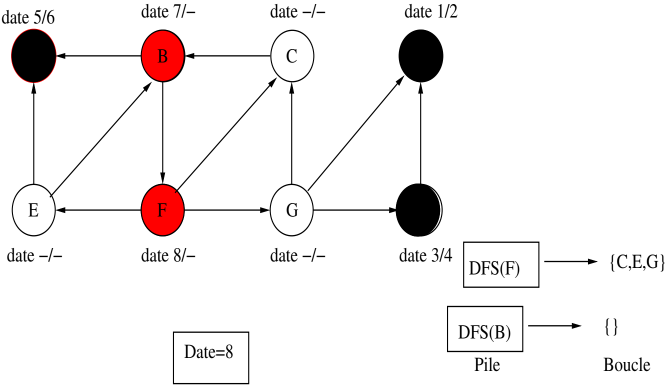
Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

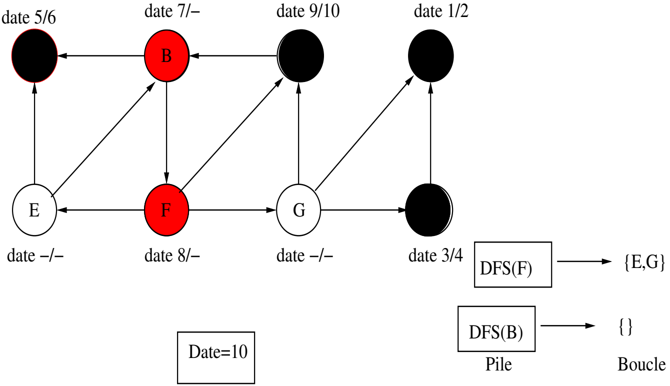
Exemple de décomposition

- Le sommet A n'est pas blanc ⇒ pas d'appel à DFS(A)
- Appel à DFS(F)
- F devient rouge



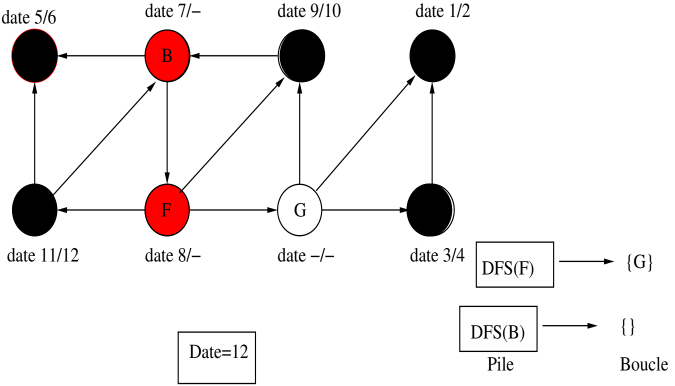
Exemple de décomposition

- Appel à DFS(C)
- C devient rouge
- C n'a pas de voisins blancs $\Rightarrow$ C devient noir



Exemple de décomposition

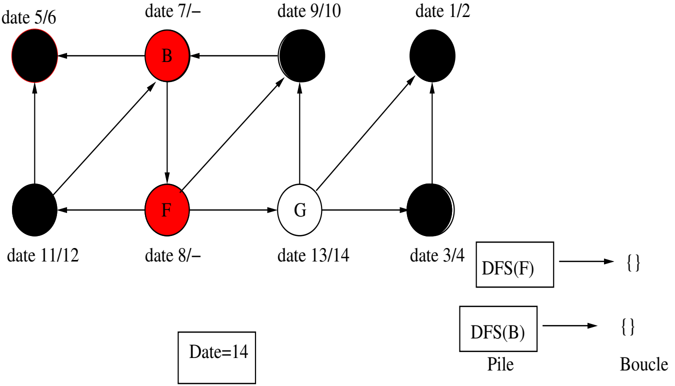
- Appel à DFS(E)
- E devient rouge
- E n'a pas de voisins blancs $\Rightarrow$ E devient noir



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

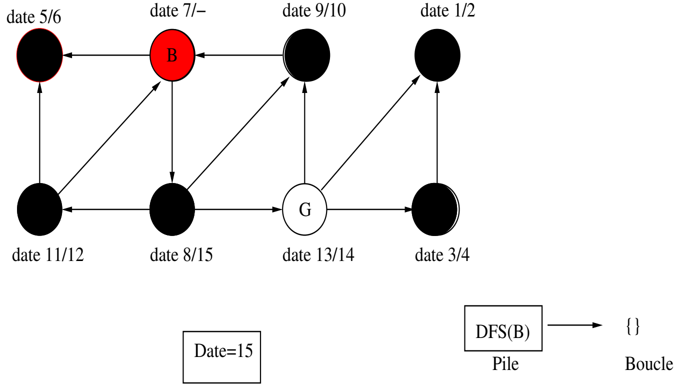
Exemple de décomposition

- Appel à DFS(G)
- G devient rouge
- G n'a pas de voisins blancs ⇒ G devient noir



Exemple de décomposition

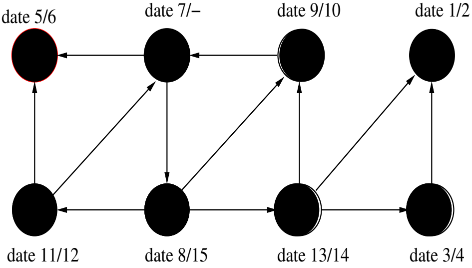
- Fin de la boucle dans la fonction DFS(F)
- F devient noir et on note la date : $dateFin(F) \leftarrow 15$



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple de décomposition

- Fin de la boucle dans la fonction DFS(F)
- F devient noir et on note la date : $dateFin(F) \leftarrow 15$



Date=16

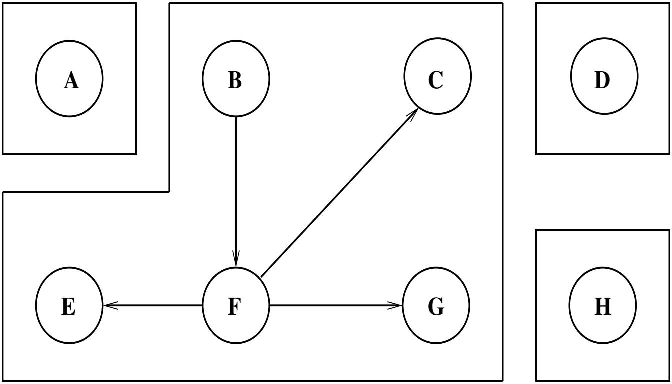
Pile

Boucle

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

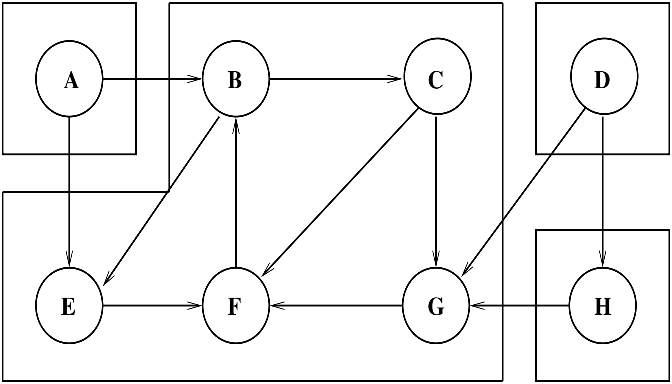
Exemple de décomposition

- Le résultat du deuxième parcours en profondeur est : une forêt de 4 arborescences



Exemple de décomposition

- Chacune de ces arborescences correspondent à : 1 **composante fortement connexe** du graphe de départ



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Algorithme du tri topologique

- Les graphes sont utilisés pour représenter : la précédence d'évènement
- Ces graphes forment une classe : **les graphes orientés acycliques**
- Une séquence respectant cette précédence est : **tri topologique**
- Si on aligne les sommets du graphe sur une droite dans l'ordre du tri topologique : tous les arcs sont orientés vers l'avant

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Algorithme du tri topologique

- Il y a deux algorithmes pour faire un tri topologique

1) On cherche un événement qui peut se produire. On enregistre cet événement puis on recommence

Tri_topologique_1(graphe G)
  TANT-QUE resteSommet(G) **FAIRE**
    chercher sommet s tq degréEntrant(s)=0
    enregistrer s
    supprimer tous arcs sortant de s
    supprimer s
  FIN-TANT-QUE

2) On utilise le parcours en profondeur

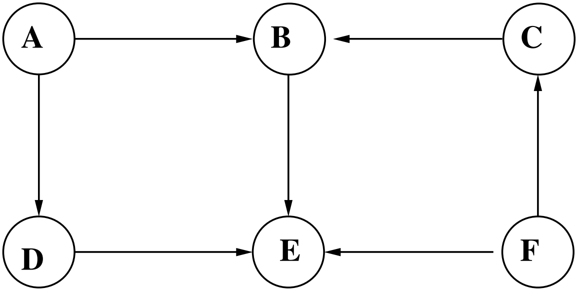
Tri_topologique_2(graphe G)
  DFS_run(G)
  Ordonner les sommets suivant dateFin(s) par ordre décroissant

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple du tri topologique

- On considère le graphe de précédence suivant

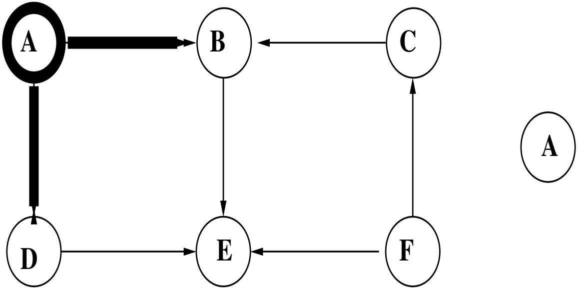
ATTENTION : Un graphe de précédence n'est pas un arbre.
Un arbre est non orienté connexe et acyclique.



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple du tri topologique

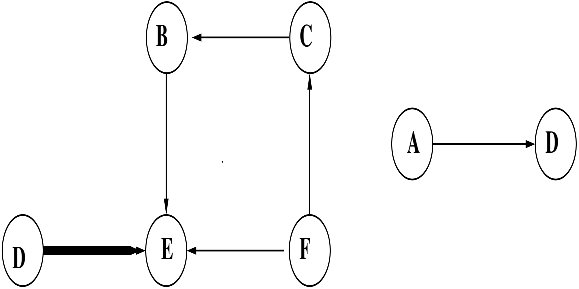
- degreEntrant(A) = 0
- Enregistrement et suppression du sommet A
- Suppression des arcs partant de A



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

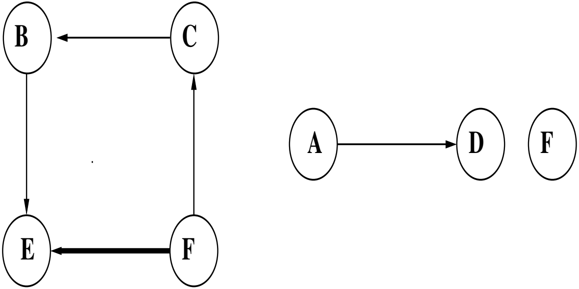
Exemple du tri topologique

- degreEntrant(D) = 0
- Enregistrement et suppression du sommet D
- Suppression des arcs partant de D



Exemple du tri topologique

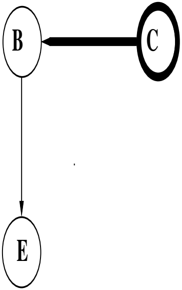
- degreEntrant(F) = 0
- Enregistrement et suppression du sommet F
- Suppression des arcs partant de F

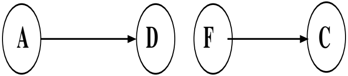


Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple du tri topologique

- degreEntrant(C) = 0
- Enregistrement et suppression du sommet C
- Suppression des arcs partant de C

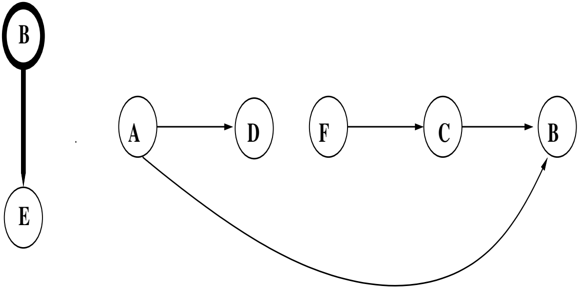




Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

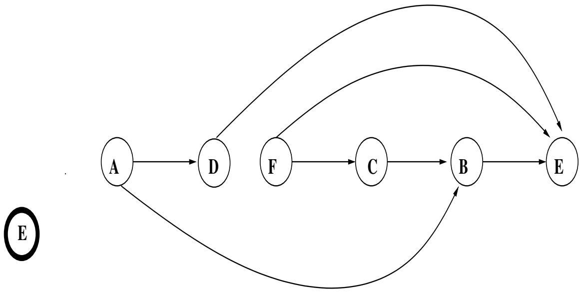
Exemple du tri topologique

- degreEntrant(B) = 0
- Enregistrement et suppression du sommet B
- Suppression des arcs partant de B



Exemple du tri topologique

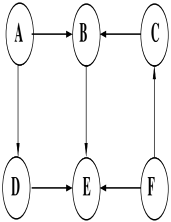
- degreEntrant(E) = 0
- Enregistrement et suppression du sommet E
- Suppression des arcs partant de E

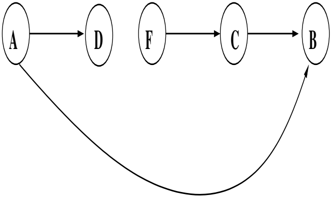


Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple du tri topologique

- Fin de l'algorithme
- On a obtenu un tri topologique du graphe de départ
- Tous les arcs sont orientés vers l'avant



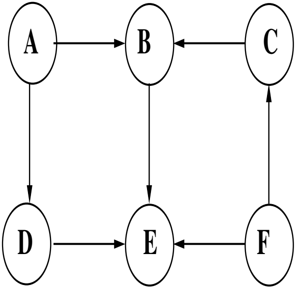


Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple du tri topologique

- On considère maintenant la **matrice d'adjacence** du même graphe de précédence

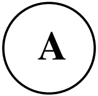
$$
\begin{array}{c}
\\
A\\ B\\ C\\ D\\ E\\ F
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array}\\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$



Exemple du tri topologique

- degreEntrant(A)=0 $\Leftrightarrow$ colonne 1 ne contient que des 0
- Suppression du sommet A $\Leftrightarrow$ suppression colonne 1
- Suppression des arcs partant de A $\Leftrightarrow$ suppression ligne 1

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

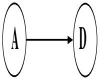


Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple du tri topologique

- degreEntrant(A)=0 $\Leftrightarrow$ colonne 1 ne contient que des 0
- Suppression du sommet A $\Leftrightarrow$ suppression colonne 1
- Suppression des arcs partant de A $\Leftrightarrow$ suppression ligne 1

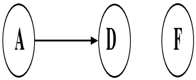
$$\begin{array}{c} \\ B \\ C \\ \mathbf{D} \\ E \\ F \end{array} \begin{pmatrix} B & C & \mathbf{D} & E & F \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Exemple du tri topologique

- degreEntrant(A)=0 $\Leftrightarrow$ colonne 1 ne contient que des 0
- Suppression du sommet A $\Leftrightarrow$ suppression colonne 1
- Suppression des arcs partant de A $\Leftrightarrow$ suppression ligne 1

$$\left(\begin{array}{ccccc} & B & C & E & \mathbf{F} \\ B & 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} \\ C & 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ E & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{F} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{array}\right)$$

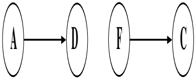


Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple du tri topologique

- degreEntrant(C)=0 $\Leftrightarrow$ colonne 2 ne contient que des 0
- Suppression du sommet C $\Leftrightarrow$ suppression colonne 2
- Suppression des arcs partant de C $\Leftrightarrow$ suppression ligne 2

$$\begin{array}{c} \\ B \\ \mathbf{C} \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B & \mathbf{C} & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

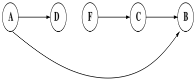


Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple du tri topologique

- degreEntrant(B)=0 $\Leftrightarrow$ colonne 1 ne contient que des 0
- Suppression du sommet B $\Leftrightarrow$ suppression colonne 1
- Suppression des arcs partant de B $\Leftrightarrow$ suppression ligne 1

$$\begin{array}{c|cc} & \mathbf{B} & E \\ \hline \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ E & \mathbf{0} & 0 \end{array}$$

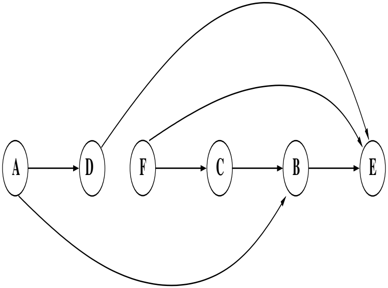


Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Exemple du tri topologique

- degreEntrant(3)=0 $\Leftrightarrow$ colonne 2 ne contient que des 0
- Suppression du dernier sommet E $\Leftrightarrow$ dernière case
- On a obtenu le même tri topologique

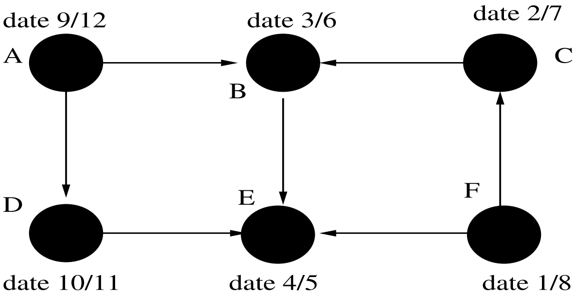
$$\begin{array}{cc} & \mathbf{E} \\ \mathbf{E} & \left(\mathbf{0}\right) \end{array}$$



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

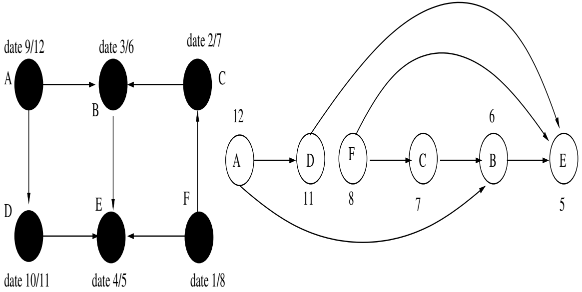
Exemple du tri topologique

- Deuxième algorithme du tri topologique
- On considère maintenant un parcours en profondeur sur le même graphe de précédence



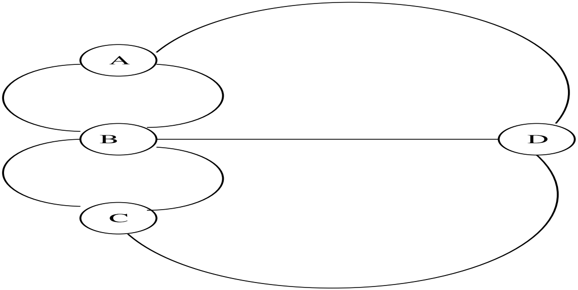
Exemple du tri topologique

- On aligne les sommets du graphe sur une ligne suivant les dates de fin dans l'ordre décroissant
- On obtient alors un tri topologique du graphe



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

- 1726



« Lors d'une promenade, est-il possible de passer sur tous les ponts de la ville de Königsberg une et une seule fois ? » ⇒ « Existe-t-il dans le graphe, un chemin où les arêtes sont différentes deux à deux et qui revient sur le sommet de départ ? »

Introduction et Définitions

Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Lemme des poignées de mains

- Théorème - (lemme des poignées de mains)
  - i. La somme de tous les degrés est un nombre pair. C'est le double du nombre d'arêtes
  - ii. Le nombre de sommets de degré impair est pair.
- Démonstration (i.)
  - Chaque arête est comptée deux fois :
    Une fois pour le sommet de départ.
    Une fois pour le sommet d'arrivée.

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Lemme des poignées de mains

- Démonstration (ii.)
  - Soit S_{total} le nombre de sommets du graphe
  - Soit S_{iml} le nombre de sommets de degré impair
  - Somme des degrés$=\sum_{i=1}^{S_{imp}} degImp_i + \sum_{i=S_{imp}+1}^{S_{total}} degPaire_i$

$$=\sum_{i=1}^{S_{imp}}(2k_i+1) + \sum_{i=S_{imp}+1}^{S_{total}}(2k_i)$$

$$=2\sum_{i=1}^{S_{total}}(k_i) + S_{imp}$$

  - Somme des degrés est paire $\Rightarrow S_{imp}$ est pair

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Lacet de Jordan

- Dans un graphe non orienté, on dit qu'un chemin $(v_0, v_1, v_2, \cdots, v_{k-1}, v_k)$ est un :
  - Chemin de Jordan si les arêtes qu'il emprunte sont distinctes deux à deux : $\forall i, j \in [0, k-1], i \neq j \Rightarrow (v_i, v_{i+1}) \neq (v_j, v_{j+1})$
  - Lacet de Jordan si c'est un chemin de Jordan avec $v_0 = v_k$
  - Cycle de Jordan si c'est un lacet de Jordan et si les sommets intermédiaires sont distincts 2 à 2 : $\forall i, j \in [1, k-1], i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j$

Introduction et Définitions

Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Graphe eulérien

- On dit qu'un graphe non orienté est :
  - eulérien s'il existe un lacet de Jordan contenant toutes les arêtes du graphe.
  - Semi-eulérien s'il existe un chemin de Jordan contenant toutes les arêtes du graphe (mais pas de lacet de Jordan).
  - Pré-eulérien ou chinois s'il existe un lacet contenant au moins une fois chacune des arêtes du graphe.

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Graphe eulérien
Théorème de caractérisation

- Théorème de caractérisation :
  - Un graphe connexe est eulérien ssi tous ses sommets sont de degré paire
  - Un graphe connexe est semi-eulérien ssi il ne contient que 2 sommets de degré impaire

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Graphe eulérien
Démonstration

- Eulérien ⇒ Tous les sommets ont un degré pair
  - Eulérien ⇒ un lacet de Jordan qui passe par toutes les arrêtes.
  - En suivant ce lacet on passe par tous les arcs une et une seul fois
  - On suit ce lacet en enregistrant pour :
    - Le sommet départ : l'arc sortant ⇒ DEG + 1
    - Les sommets intermédiaires : l'arc entrant et l'arc sortant ⇒ DEG + 2
    - Le sommet d'arrivée : l'arc entrant ⇒ DEG + 1
  - Cycle ⇒ sommet départ = sommet arrivée ⇒ DEG + 1 + 1
  - Tous les degrés obtenus sont paires

Introduction et Définitions

Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Graphe eulérien
Démonstration

- Semi-eulérien $\Rightarrow$ Exactement 2 degrés impairs
  - On applique la même méthode
  - Semi-eulérien $\Rightarrow$ sommet départ $\neq$ sommet arrivée
  - Si un sommet n'est ni le départ ni le sommet d'arrivée :
    - A chaque occurrence de ce sommet dans le chemin on fait DEG + 2
    - Le degré obtenu pour ce sommet est pair
  - Pour le sommet de départ (resp. d'arrivé) :
    - On fait DEG + 1 au départ (resp. a l'arrivée)
    - A chaque occurrence de ce sommet dans le chemin on fait DEG + 2
    - Le degré obtenu pour ce sommet est impaire DEG=(nbOccurrences x 2) + 1

Introduction et Définitions

Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Graphe eulérien
Démonstration

Lemme

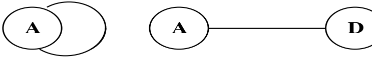
Si tous les sommets ont un degré pair, on peut toujours étendre un chemin de Jordan vers un lacet de Jordan

- Preuve
  - Soit un chemin de Jordan de u à v si $u \neq v$ alors :
    on a emprunter un nombre impaire arêtes de v
  - Puisque par hypothèse v a un nombre paire d'arêtes, il reste au moins une arrête qui n'appartient pas au chemin de Jordan.
  - Donc $u \neq v \Rightarrow$ on peut étendre le chemin
  - Or il y a un nombre fini d'arêtes $\Rightarrow$ extension pas infini
  - On finit donc par avoir u = v
  - On peut toujours étendre ce chemin vers un lacet de Jordan

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Graphe eulérien Démonstration

- Tous les sommets ont un degré pair $\Rightarrow$ Eulérien
- Raisonnements par récurrence sur n le nombre d'arêtes
  - Pour n=1, il n'existe que deux graphes



- seul le premier n'a que des degrés pairs et il est Eulérien

Introduction et Définitions

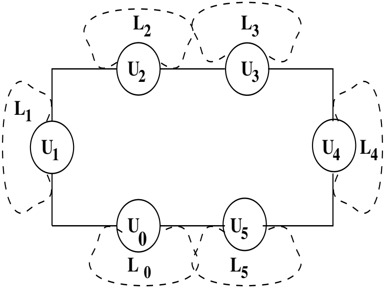
Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Graphe eulérien
Démonstration

- **Supposons la proposition vraie pour les graphes à n-1 arêtes**
  - D'après le lemme on peut construire un lacet de Jordan
  - Les arêtes n'appartenant pas au lacet forment des **composantes connexes**



Introduction et Définitions

Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Graphe eulérien
Démonstration

- Dans ces composantes tous les degrés sont pairs
- Par hypothèse de récurrence, elles sont Eulériennes
- Soit L_i les lacets de Jordan les couvrant totalement
- $u_0\ L_0\ u_0\ u_1\ L_1\ u_1\ u_2\ L_2\ u_2\ u_3\ L_3\ u_3\ u_4\ L_4\ u_4\ u_5\ L_0\ u_5\ u_0$ forment un lacet de Jordan qui couvrent tout le graphe. $\Rightarrow$ le graphe est Eulérien.

Introduction et Définitions

Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Graphe eulérien
Démonstration

Lemme

Si exactement 2 sommets u et v ont un degré impair, on peut toujours étendre un chemin de Jordan partant de u vers un chemin de Jordan reliant u et v.

- Preuve
  - Soit un chemin de Jordan de u à w
    - si $w \neq v$ et $w \neq u$ alors : On a emprunté un nombre impair d'arêtes de w qui avait par hypothèse un nombre pair d'arêtes.
      si w=u : on a emprunté un nombre pair d'arêtes de u qui avait par hypothèse un nombre impair d'arêtes.

Introduction et Définitions

Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Graphe eulérien
Démonstration

- Dans les 2 cas il reste au moins une arête qui n'appartient pas au chemin de Jordan. $\Rightarrow$ on peut étendre le chemin
- Or il y a un nombre fini d'arêtes $\Rightarrow$ extension pas infinie
- On finit donc par avoir w = v et donc chemin de Jordan reliant u et v

Introduction et Définitions

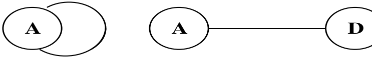
Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Graphe eulérien
Démonstration

- 2 sommets (u et v) avec un degré impair ⇒ Semi-Eulérien
- Raisonnements par récurrence sur n le nombre d'arêtes
  - Pour n=1, il n'existe que deux graphes



  - seul le deuxième a deux degrés impairs et il est Semi-Eulérien

Introduction et Définitions

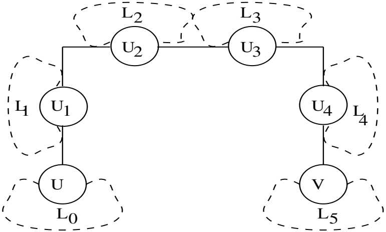
Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Graphe eulérien
Démonstration

- **Supposons la proposition vraie pour les graphes à n-1 arêtes**
  - D'après le lemme on peut construire un lacet de Jordan
  - Les arêtes n'appartenant pas au lacet forment des **composantes connexes**



Introduction et Définitions

Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

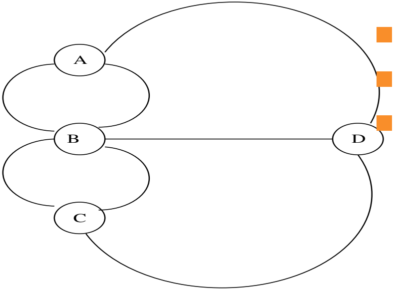
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Graphe eulérien
Démonstration

- Dans ces composantes tous les degrés sont pairs
- Par hypothèse de récurrence, elles sont Eulériennes
- Soit L_i les lacets de Jordan les couvrant totalement
- $u\ L_0\ u\ u_1\ L_1\ u_1\ u_2\ L_2\ u_2\ u_3\ L_3\ u_3\ u_4\ L_4\ u_4\ v\ L_0\ v$ forment un lacet de Jordan qui couvrent tout le graphe. $\Rightarrow$ le graphe est Eulérien.

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Les 7 ponts : La solution



- Degré(A)=3
- Degré(B)=5
- Degré(C)=3
- Degré(D)=3

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

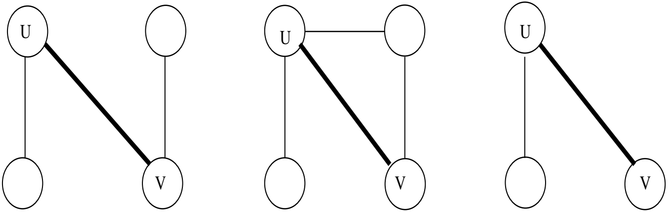
Les 7 ponts : La solution

- Des théorèmes précédents on peut déduire que :
  - Königsberg n'est pas un graphe Eulérien
  - Königsberg n'est pas un graphe Semi-Eulérien
- Il n'y a pas de promenade possible
- Et ce même si on ne revient pas au point départ

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Définition : Pont

- Dans un graphe non orienté connexe, on dit qu'une arête est un **pont** si, lorsqu'on la retire en effaçant les sommets devenus isolés le nouveau graphe obtenu **n'est plus connexe**



L'arete (u,v) est un pont

L'arete (u,v) n'est pas un pont

L'arete (u,v) n'est pas un pont

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Algorithme de Fleury Fleury(graphe G)

Choisir un sommet u

TANT-QUE $degr(u) \neq 0$ **FAIRE**

    Choisir une arête (u,v) qui n'est **pas un pont**

    Effacer (u,v)

    SI degre(u)=0 **ALORS**

        effacer u

    FIN SI

    $u \leftarrow v$

FIN TANT-QUE

Introduction et Définitions

Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Algorithme de Fleury Liveness & Safety

- Pour démontrer un algorithme, il suffit de démontrer deux propriétés :
  - La propriété de **vivacité : Liveness** « Il peut toujours arriver quelque chose de bien »
  - La propriété de **sûreté : Safety** « Il n'arrive jamais quelque chose de mauvais »

Introduction et Définitions

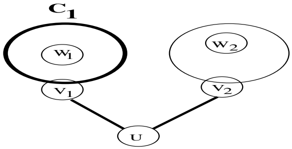
Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Algorithme de Fleury Démonstration : Liveness

- « degré(u) > 0 ⇒ on peut choisir un (u,v) qui n'est pas un pont »
  - Par définition : s'il y a un pont ⇒ degré(u) > 1
  - Uniquement des ponts ⇒ au moins deux ponts
  - Soit C_i la composante connexe au bout du pont (u,v_i)
    - Le degré de v_i dans le graphe connexe C_i est impair.
    - D'après le lemme des poignées de main : il existe dans C_i un autre sommet w_i de degré impair.



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Algorithme de Fleury Démonstration : Liveness

- Que des ponts $\Rightarrow$ au moins deux sommets de degré impair.
- Or un graphe est eulérien ssi tous ses degrés sont pairs.
- Au cours du parcours il ne peut y avoir en plus du sommet u qu'au plus un autre sommet au degré impair (l'origine du parcours).
- Donc il ne peut pas y avoir plus d'un pont partant du sommet u
- Par contraposée : pas plus d'un pont $\Rightarrow$ pas uniquement des ponts

Introduction et Définitions

Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Algorithme de Fleury Démonstration : Safety

- « degré(u) = 0 $\Rightarrow$ on a parcouru toutes les arêtes du graphe »
  - L'algorithme est ainsi fait qu'à tout instant le graphe reste connexe.
  - Or si un graphe connexe contient un point isolé, c'est qu'il est réduit à cet unique point isolé.
  - Cela signifie que la dernière arête que l'on vient d'effacer était aussi la dernière du graphe.
  - Comme les arêtes ne sont effacées qu'après avoir été parcourues : **Toutes les arêtes du graphe on été parcourues une et une seule fois**.

Introduction et Définitions

Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Graphe hamiltonien

- On dit qu'un graphe non orienté connexe est :
  - **hamiltonien** s'il existe un cycle de Jordan contenant toutes les sommets du graphe.
  - **semi-hamiltonien** s'il existe un chemin de Jordan élémentaire contenant toutes les sommets du graphe (mais pas de cycle de Jordan).
- **Rappel :**
  - Un chemin $(v_0, v_1, v_2, \cdots, v_{k-1}, v_k)$ est **élémentaire** ssi $\forall i, j, v_i \neq v_j$
  - Un cycle est toujours élémentaire

Introduction et Définitions

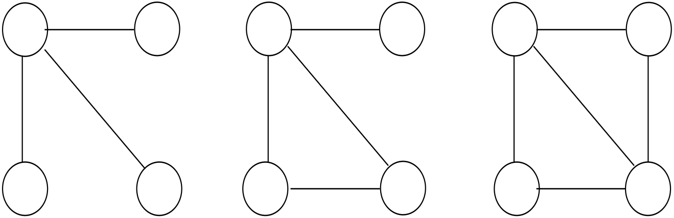
Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Graphe hamiltonien

Les graphes suivants sont :



Non Hamiltonien

Semi Hamiltonien

Hamiltonien

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Graphe hamiltonien
Caractérisation

- Contrairement au cas des graphes eulériens : on n'a encore trouvé aucune condition nécessaire et suffisante assurant qu'un graphe est hamiltonien ou semi-hamiltonien.
- Il existe, cependant, de nombreux théorèmes donnant des conditions suffisantes.

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Caractérisation

- Théorème de caractérisation de O. Ore :
  - Soit G un graphe simple possédant n>2 sommets : $\forall u, v$ non adjacents, degré(u)+degré(v)$\geq$ n
    $\Rightarrow$
    Le graphe G est Hamiltonien
- **Rappel :**
  - Un graphe est **simple** s'il ne contient pas de boucle et que deux sommets sont reliés par au plus une arête.
  - La propriété intéressante d'un graphe simple : degré(s) = nbVoisin(s)

Introduction et Définitions

Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Caractérisation

- **Corollaire de Dirac :**
  - Soit G un graphe simple possédant n>2 sommets :
    $\forall u, degre(u) \geq n/2$
    $\Rightarrow$
    Le graphe G est Hamiltonien

Introduction et Définitions

Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Théorème des 4 couleurs

Le coloriage est une activité de détente réservée aux enfants...
Pas en mathématiques !

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Théorème des 4 couleurs

Théorème

Toute carte de géographie est coloriable avec quatre couleurs sans que deux régions frontalières n'aient pas la même couleur.

- Ce théorème pourrait appartenir aux : « conjectures pour les nuls »
- C'est à son apparente simplicité qu'il doit sa popularité
- La démonstration de cette conjecture semblait accessible à *Mr ToutLeMonde*

Domaines d'applications

- Dans la téléphonie mobile :

  Les questions de coloriage permettent de réduire les fréquences d'émissions utilisées.
  1 couleur = 1 fréquences

Historique : La conjecture

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

- **1852** - Un cartographe anglais **Francis Guthrie**, remarque en coloriant la carte des cantons anglais, qu'il lui suffit de quatre couleurs pour que deux cantons ayant une frontière commune n'aient pas la même couleur.
- Il fait part de cette observation à son frère mathématicien.
- **Frederick Guthrie** en parle à son professeur **De Morgan.**
- **Première trace écrite :** lettre de De Morgan à Sir Hamilton**.**
- **1878** : **Arthur Cayley** publie la conjecture aux :
  « Société mathématique de Londres »
  « Société géographique »

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Historique : La conjecture

Découpage de l'Angleterre, du Pays de Gales et de l'Ecosse avant les changements de frontière en 1974

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Historique : Une preuve ?

- **1879 :** un avocat anglais **Alfred Bray Kempe** publie une démonstration du théorème.
- Kempe reçoit une décoration pour cette preuve.
- **1890 :** un avocat anglais **John Heawood** trouve une faille dans la preuve de Kempe.
- Il démontre alors le théorème pour 5 couleurs.
- Il élargit le problème à d'autres surfaces : tore, ruban, ...
- Heawood est décoré pour la restauration d'un château.

Introduction et Définitions

Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Historique : Par la force

- **1971 :** Première tentative d'utilisation de la puissance informatique par le japonais Matsumoto.
- **1976 : Kenneth Appel et Wolfgang Haken** établissent enfin une preuve du théorème des 4 couleurs.
- Leur démonstration du théorème se basait sur une approche mathématique conventionnelle et utilisait un ordinateur dans le seul but de venir à bout de plus d'un milliard de combinaisons de calculs :
  - Mathématiquement ils montrent qu'il y a 1478 configurations inévitables dans une carte géographique
  - Puis avec 1200 heures de calcul qu'elles sont coloriables.

Introduction et Définitions

Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Historique : Preuve assistée

- **1995 : Robertson, Sanders, Seymour et Thomas.** diminuent le nombre de configurations 633 et automatisent une partie de la démonstration («inévitabilité»)
- **2005 : Georges Gonthier et Benjamin Werner (INRIA)** s'attaquent au problème sous un angle différent : ils utilisent exclusivement des outils d'aide à la preuve.
- **Coq :** Un outil informatique capable d'effectuer et de vérifier la démonstration étape par étape, s'affranchissant du moindre risque d'erreurs de programmation.

Introduction et Définitions

Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Les limites

- Ce théorème a ses limites :
  Il ne doit pas y avoir de contraintes extérieures sur les choix des couleurs.
- Dans la pratique ce n'est pas toujours le cas :
  - La mer et les lacs doivent être bleus.
  - Certains pays peuvent avoir des enclaves.

Introduction et Définitions

Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Théorème des enclaves

Theorem

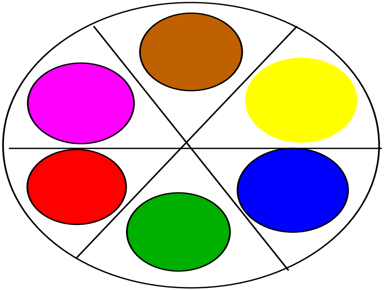
Si chacune des régions d'une carte de géographie est constituée de 1 ou 2 morceaux (au plus une enclave), il est toujours possible de la colorier avec 12 couleurs de façon à ce que deux régions frontalières n'aient pas la même couleur.

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Graphes d'incidence

- Pour modéliser ce problème on peut utiliser la théorie des graphes.
- A chaque carte on associe un **graphe d'incidence**
  - A chaque pays correspond un sommet
  - A chaque frontière correspond une arête

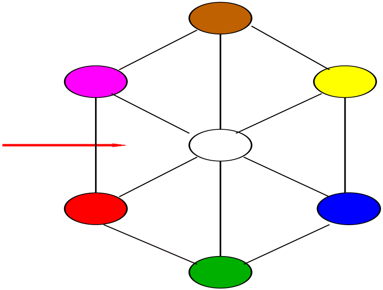
ATTENTION :
On ne considère pas les frontières réduites à un seul point.
Ex : Pas de frontière entre le camembert « sport » et le camembert « art et littérature »



Graphes d'incidence

- Pour modéliser ce problème on peut utiliser la théorie des graphes.
- A chaque carte on associe un graphe d'incidence
  - A chaque pays correspond un sommet
  - A chaque frontière correspond une arête

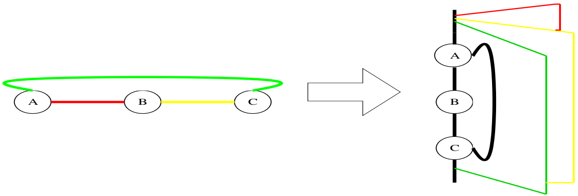
ATTENTION :
Ne pas oublier le pays « bordure »



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Graphes planaires

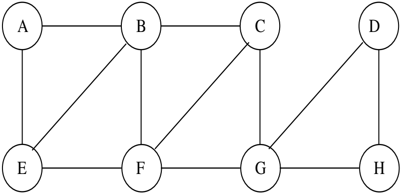
- On dit d'un graphe qu'il est **planaire** si :
  - S'il existe une représentation dans un plan de ce graphe tel que les arêtes ne s'entrecoupent pas.
- Par contre, on peut toujours représenter un graphe dans l'espace tel que les arêtes ne se croisent pas :
  - Tous les sommets sont placés sur l'axe Z
  - A chaque arête on associe un demi-plan



Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Identité d'Euler

- Pour tout graphe planaire connexe on a : **l'identité d' Euler :** S-A+F =2
- S : le nombre de sommets
- A : le nombre d'arêtes
- F : le nombre de faces, ie le nombre de régions délimitées par des arêtes, y compris la face extérieure la seule à ne pas être bornée



- S=8
- A=12
- F=6
- S−A+F=8−12+6=2

Introduction et Définitions

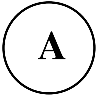
Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Preuve

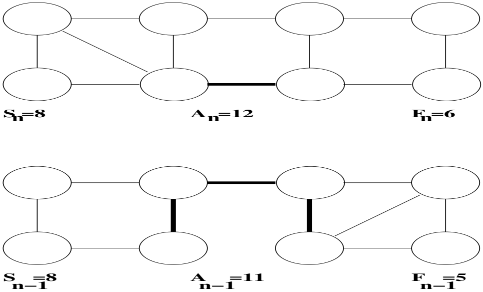
- Graphe connexe planaire ⇒ S -A+F=2
- Raisonnements par récurrence sur n le nombre d'arêtes
  - **Pour n=0**, la connexité impose un graphe réduit à un sommet :



- S=1, A=0 et F=1 ⇒ S-A+F=1–0+1=2

Preuve

- **Supposons la proposition vraie pour les graphes à n-1 arêtes**
  - Soit un graphe connexe planaire à n arêtes. Si on supprime 1 arête :
    - Si l'arête supprimée est bordée par deux faces :



Introduction et Définitions

Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

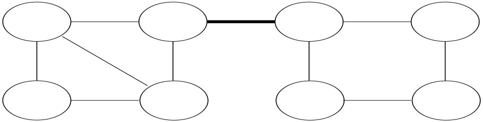
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Preuve

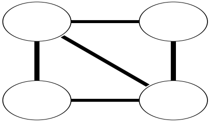
- Si l'arête supprimée est bordée par deux faces :
  - Une seule face est non bornée $\Rightarrow$ 1 de ces faces est bornée
  - Le reste du contour de cette face maintient la connexité.
  - $S_n = S_{n-1}$ mais on a diminué : $A_n - 1 = A_{n-1}$ et $F_n - 1 = F_{n-1}$
  - Par hypothèse de récurrences on a : $S_{n-1} - A_{n-1} + F_{n-1} = 2$
  - $S_{n-1} - A_{n-1} + F_{n-1} = S_n - (A_n - 1) + (F_n - 1) = S_n - A_n + F_n = 2$

Preuve (Suite)

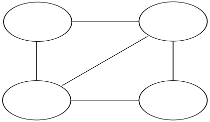
- Graphe connexe planaire $\Rightarrow S - A + F = 2$



$S_n=8$
$A_n=11$
$F_n=5$



$S_A=4$
$A_A=5$
$F_A=3$



$S_B=4$
$A_B=5$
$F_B=3$

- Si l'arête supprimée est bordée par une face :
  - Alors cette face est la face extérieure non bornée
  - On obtient alors 2 composantes connexes : G_A et G_B.

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Preuve (Suite)

- Alors cette face est la face extérieure non bornée
- On obtient alors 2 composantes connexes : G_A et G_B.
- Elles sont planaires donc par hypothèse de récurrences on a : $S_A - A_A + F_A = 2$ et $S_B - A_B + F_B = 2$
- On a partitionné les sommets : $S_A + S_B = S_n$
- On a supprimé une arête : $A_A + A_B = A_n - 1$
- La face extérieure est commune : $F_A + F_B = F_n + 1$
  - On a donc : $S_A + S_B - (A_A + A_B) + F_A + F_B = 2 + 2$
    $S_n - (A_n - 1) + F_n + 1 = 4$
    $S_n - A_n + F_n = 2$

Introduction et Définitions

Parcours en largeur et Parcours en profondeur

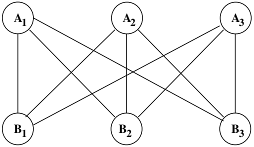
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

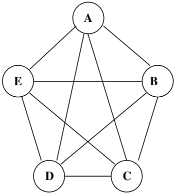
Graphes non planaires

- 1930 le mathématicien polonais Kuratowski montre :
  - Tout graphe connexe non planaire contient un sous graphe homéomorphe à l'un des 2 graphes suivants :

K_{33}



K_5



Pour K_{33} le graphe bipartie avec deux ensembles à 3 sommets «3 maisons reliées à 3 usines» et pour K_5 Le graphe complet à 5 sommets (reliés 2 à 2)

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Preuve K_5

- Chaque face d'un graphe planaire a au moins 3 cotés : $\Rightarrow A \geq 3F$
- Si l'on considère l'identité d'Euler : S-A+F=2
  F=2-S+A$\Rightarrow A \geq 6 - 3S + 3A \Rightarrow 3S - 6 \geq A$

- K_5
  - S=5 et A=4+3+2+1=10
  - 3x5-6<10
  - **N'est pas planaire**
- K_{33}
  - S=6 et A=9
  - $3x6 - 6 \geq 9$
  - **Pourrait être planaire**

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Preuve K_{33}

- Dans K_{33} un chemin de longueur 3 ne peut être fermé
- Les faces du graphe K_{33} ne peuvent être triangulaires : $\Rightarrow A \geq 4F$
- Si l'on considère l'identité d'Euler : S-A+F=2
  F=2-S+A $\Rightarrow A \geq 8 - 4S + 4A \Rightarrow 4S - 2 \geq A$
- K_{33}
  - S=6 et A=9
  - 3x6-6<9
  - **N'est pas planaire**

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

La remarque de Morgan

- Comme K_5 n'est pas planaire :
  - Un graphe d'incidence ne peut avoir : **5 sommets reliés 2 à 2**
  - Une carte de géographie ne peut avoir : **5 pays mutuellement frontaliers**

ATTENTION :
Cette propriété n'est pas suffisante pour démontrer le théorème des 4 couleurs.
Ex : On peut construire une carte où il n'y a pas 4 pays mutuellement frontaliers et où 3 couleurs ne sont pas suffisantes.

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Preuve de Kempe

Theorem

Tout graphe planaire possède au moins ***un sommet de degré inférieur ou égal à 5***

- Preuve par l'absurde :
  - Soit G un graphe tel que : $\forall s \in S, deg(s) > 5$
  - La somme des degrés de G est donc : $\sum_{s \in S} deg(s) \geq 6S$
  - D'après le lemme des poignées de mains, on a : $2A \geq 6S \Rightarrow A \geq 3S$
  - Or on a vu que dans un graphe planaire on a : $3S - 6 \geq A \Rightarrow 3S - 6 \geq 3S$

Introduction et Définitions

Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Preuve de Kempe

- **Preuve de Kempe :**
- Raisonnements par récurrence sur n le nombre de sommets.
  - Pour **n<5** , le résultat est évident.
  - **Supposons la conjecture vraie pour les graphes à n-1 sommets**
    - Soit G un graphe planaire avec n sommets
    - Il existe au moins un sommet u de G de degré inférieur ou égale à 5.

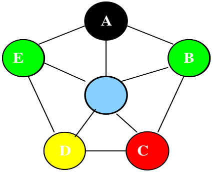
Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

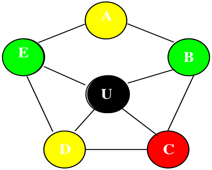
Preuve de Kempe

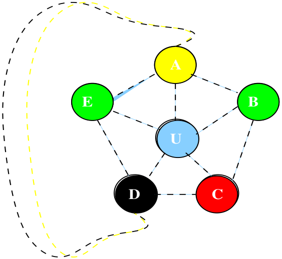
- Si les voisins u n'utilisent que 3 couleurs dans le coloriage de G' :
  - En utilisant une couleur libre pour u on obtient un coloriage de G.
- Sinon on va essayer de modifier le coloriage de G' :
  - Si dégage une couleur pour u, on obtiendra un coloriage de G.

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Preuve de Kempe







On va colorier A en jaune

→

De proche en proche
noir → jaune
jaune → noir

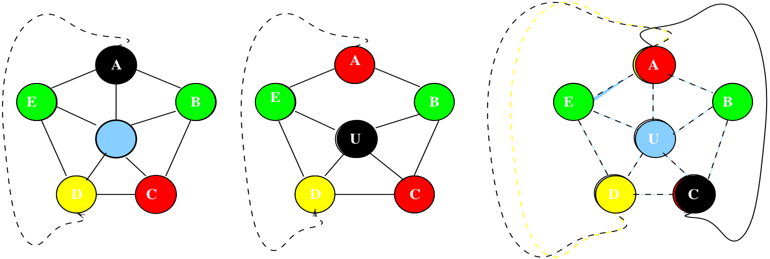
Si D reste B=jaune
U peut devenir noir

Si D devient noir quand A devient jaune

→

Il y a une chaine noir et rouge entre A et C

Preuve de Kempe

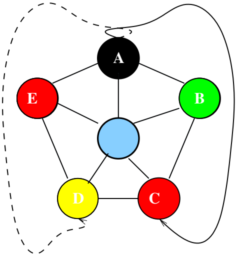


On va colorier
A en rouge
⟶
De proche en proche
noir ⟶ rouge
rouge ⟶ noir

Si C reste rouge
U peut devenir noir

Si C devient noir quand
A devient rouge
⟶
Il y a une chaine noir et
rouge entre A et C

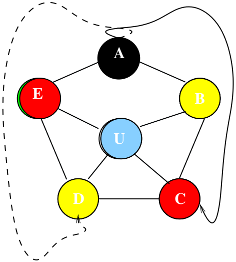
Preuve de Kempe



Il y a une chaine noir jaune entre A et D

$\Longrightarrow$

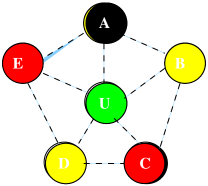
Il n'y a pas de chaine verte et rouge entre E et C.
E peut devenir rouge



Il y a une chaine noir entre et rouge entre A et C

$\Longrightarrow$

Il n'y a pas de chaine verte et jaune entre B et D
B peut devenir jaune



u peut devenir vert

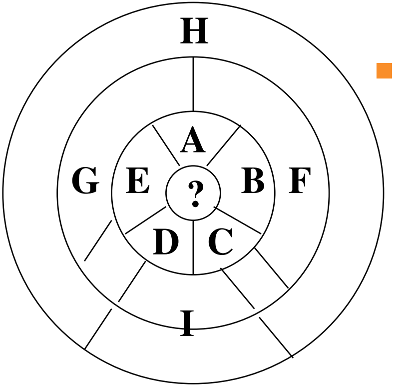
Introduction et Définitions

Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

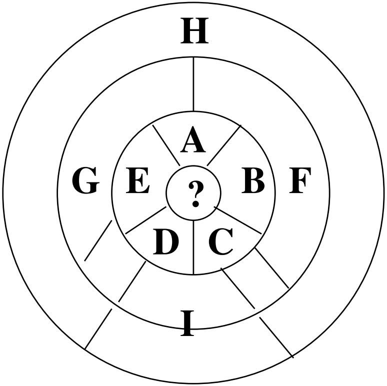
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Effet de bord : Rupture de chaîne



- Comme K_5 n'est pas planaire
- Un graphe d'incidence ne peut avoir.

Effet de bord : Rupture de chaîne



Colorier A en jaune
⇓
Colorier F en noir
⇓
Colorier H en jaune
⇓
Colorier D en noir
⇓
Il y a une chaîne :
noir-jaune
A-F-H-D

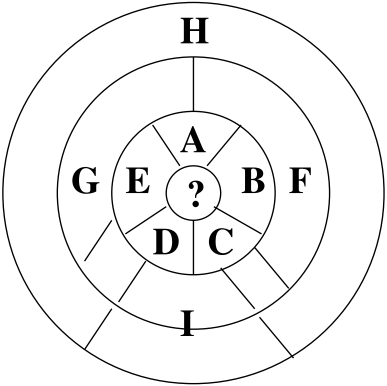
Introduction et Définitions

Parcours en largeur et Parcours en profondeur

Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens

Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

Effet de bord : Rupture de chaîne



Colorier A en rouge

$\Downarrow$

Colorier G en noir

$\Downarrow$

Colorier H en rouge

$\Downarrow$

Colorier C en noir

$\Downarrow$

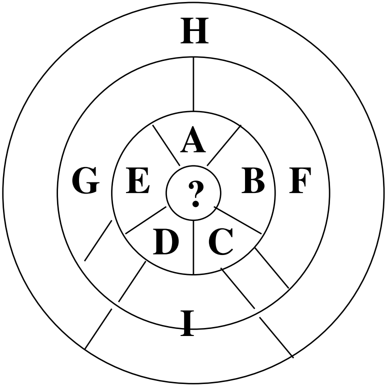
Il y a une chaîne :

noir-rouge

A-G-H-C

Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

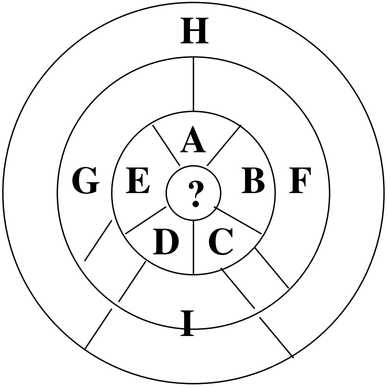
Effet de bord : Rupture de chaîne



Colorier E en rouge
⇓
Colorier G en vert
⇓
C reste rouge

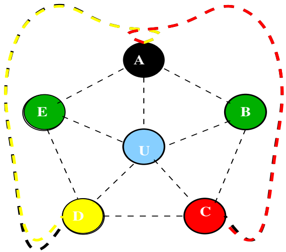
Introduction et Définitions
Parcours en largeur et Parcours en profondeur
Graphes eulériens et Graphes hamiltoniens
Graphes planaires & Le théorème des 4 couleurs

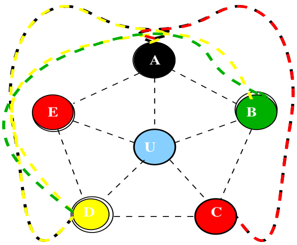
Effet de bord : Rupture de chaîne



Colorier B en jaune
⇓
Colorier F en vert
⇓
Colorier G en jaune
⇓
Colorier D en vert
⇓
Il y a une chaîne :
vert-jaune
B-F-G-D

Effet de bord : Rupture de chaîne





L'argument de Kempe repose sur l'existence de deux chaines:
- **noir et jaune entre A et D**
- **verte et jaune entre B et D**

Effet de bord possible quand E devient rouge: une rupture dans la chaine AC

$\Longrightarrow$

rien n'empeche l'existence d'une chaine verte et jaune entre B et D.